

**CONSTANTIN UDRIȘTE
VALERIA TOMULEANU**

GEOMETRIE ANALITICĂ

XI

Conf. univ. dr. Constantin Udriște

Prof. Valeria Tomuleanu

MATEMATICĂ

GEOMETRIE ANALITICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A



Editura Didactică și Pedagogică — București

Capitolul I

CALCUL VECTORIAL

§ 1. Vectori liberi

Un vector liber are trei elemente caracteristice: *direcție, sens și lungime (normă sau modul)*. Acestea vor fi definite în continuare. Precizăm însă de la început că nu orice entitate descrisă prin „direcție, sens și mărime” este un vector liber.

Fie A și B două puncte din plan. Segmentul $[AB]$ este bine determinat de extremitățile sale A și B , iar sensul de parcurs pe un asemenea segment este bine determinat de o ordonare a acestor extremități. Aceste observații justifică următoarea:

Definiție. O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numește **segment orientat** (vector legat în punctul A) și se notează cu \overrightarrow{AB} .

Fie \overrightarrow{AB} un segment orientat. Punctul A se numește *originea* lui \overrightarrow{AB} , iar punctul B se numește *extremitatea* lui \overrightarrow{AB} . Dacă $A \neq B$, atunci segmentul orientat \overrightarrow{AB} se reprezintă grafic prin săgeata care unește pe A cu B (fig. I. 1). În cazul când $A = B$ se obține ceea ce se numește *segmentul orientat nul* \overrightarrow{AA} , care se reprezintă grafic prin punctul A .

Segmentele orientate \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} se numesc:

- 1) *egale*, dacă $A = C$ și $B = D$ (coincid);
- 2) *opuse*, dacă $A = D$ și $B = C$.

Dreapta determinată de segmentul orientat \overrightarrow{AB} se numește *dreapta suport* a lui \overrightarrow{AB} și se notează cu AB . Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$; orice dreaptă care trece prin punctul A este dreaptă suport pentru segmentul orientat nul \overrightarrow{AA} . Două segmente orientate se numesc *coliniare* dacă dreptele lor suport sînt egale (coincid); două segmente orientate se numesc *paralele* dacă dreptele suport corespunzătoare sînt paralele.

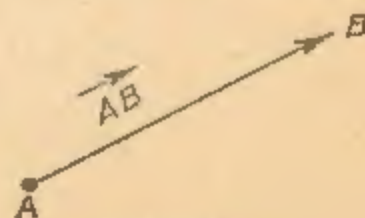


Fig. I. 1.

Direcție

Două drepte d și d' din plan se numesc „egale sau paralele” dacă $d \subset d'$, $d' \subset d$ (coincid) sau $d \cap d' = \emptyset$ (sînt disjuncte).

Teoremă*. Relația binară „egale sau paralele” este o relație de echivalență pe mulțimea dreptelor din plan.

Demonstrație. Relația „egale sau paralele” este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Reflexivitatea este totuna cu egalitatea. Simetria rezultă din reflexivitate și din simetria paralelismului între drepte: dacă $d = d'$, atunci și $d' = d$; dacă $d \parallel d'$, atunci și $d' \parallel d$. Tranzitivitatea decurge din faptul că două drepte paralele cu o a treia sînt sau egale sau paralele.

Reamintim că o relație de echivalență definită pe o mulțime determină o împărțire a mulțimii respective în clase de echivalență (submulțimi disjuncte), într-o clasă de echivalență intrînd toate elementele echivalente între ele. În cazul relației „egale sau paralele” definită pe mulțimea dreptelor din plan, clasele de echivalență se numesc *direcții*. Cu alte cuvinte o *direcție* este o familie de drepte paralele (fig. I. 2), fiecare dreaptă din această familie fiind un reprezentant al direcției din care face parte. Astfel „direcția unei drepte” se utilizează ca sinonim pentru „familia de drepte paralele cu o dreaptă dată” sau pentru „clasa de echivalență determinată de dreapta respectivă în raport cu relația egale sau paralele”.

Un segment orientat nenul \overrightarrow{AB} determină în mod unic dreapta suport AB . De aceea direcția dreptei suport poate fi atașată direct oricărui segment orientat care determină dreapta. Astfel direcția dreptei AB se numește *direcția segmentului orientat nenul* \overrightarrow{AB} . Ținînd seama că dreapta suport a unui segment orientat nul nu este unic determinată, admitem că direcția unui asemenea segment este *nedeterminată*.

Definiție. Se spune că două segmente orientate au aceeași direcție dacă:

- 1) ambele sînt nenule și dreptele lor suport aparțin aceleiași direcții, sau
- 2) ambele sînt nule.

Teoremă. Relația binară „aceeași direcție” pentru segmente orientate este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate.

Demonstrație. Temă.

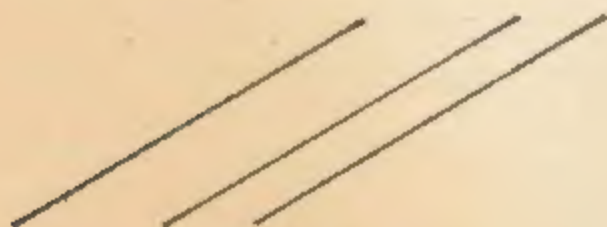


Fig. I. 2

Pentru segmentele orientate nenule *direcțiile* sînt clasele de echivalență ale dreptelor suport relativ la relația „egale sau paralele”. Cu alte cuvinte două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă și numai dacă ele sînt coliniare sau paralele.

* Fie E o mulțime oarecare nevidă. Se numește *relație binară* pe E o submulțime a produsului cartezian $E \times E$. O relație binară pe E care este reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește *relație de echivalență* pe E .

Fie d o dreaptă din plan. Pe dreapta d se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor drepte, consecință a axiomelor de ordine) pe care le vom nota prin săgeți. O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește *dreaptă orientată* (fig. I. 3).

Definiție. Două segmente orientate nenule coliniare au același sens dacă sensurile de parcurs determinate pe dreapta suport comună coincid.

Două segmente orientate nenule paralele au același sens dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care unește originile segmentelor (fig. I. 4).

Teoremă. Relația binară „același sens“, pentru segmente orientate nenule de aceeași direcție, este o relație de echivalență.

Demonstrație. Temă.

Două segmente orientate nenule care au același sens au implicit și aceeași direcție. Clasele de echivalență relative la relația „același sens“ se numesc *sensuri*. Evident există numai două asemenea clase: *sensul inițial* impus de un segment orientat nenul fixat și *opusul* său. Admitem că sensul unui segment orientat nul este *nedeterminat*.

Familia de drepte paralele cu o dreaptă dată este direcția dreptei respective. O direcție pentru care s-a fixat același sens (de parcurs) pe toate dreptele pe care le conține se numește *direcție orientată* (fig. I. 3). Pentru fixarea unei direcții orientate este suficientă indicarea unui segment orientat nenul pe una dintre dreptele familiei numită direcție.

Lungime

Fie \overrightarrow{AB} un segment orientat. Prin *lungimea* (*norma sau modulul*) lui \overrightarrow{AB} înțelegem lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanța dintre punctele A și B . Un segment orientat nul are lungimea zero și reciproc orice segment orientat de lungime zero este nul. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

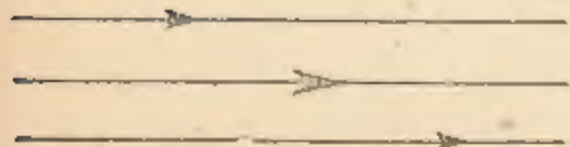


Fig. I. 3

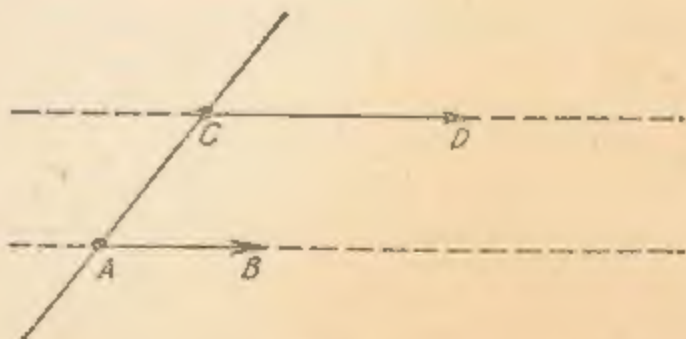


Fig. I. 4

Definiție. Două segmente orientate au aceeași lungime dacă segmentele neorientate corespunzătoare sînt congruente.

Teoremă. Relația binară „aceeași lungime” pentru segmente orientate este o relație de echivalență.

Demonstrație. Relația „aceeași lungime” pentru segmente orientate este definită prin relația de congruență pentru segmente neorientate, iar aceasta din urmă este o relație de echivalență.

* * *

Relațiile binare „aceeași direcție”, „același sens” și „aceeași lungime” pentru segmentele orientate din plan generează o nouă relație binară pentru segmentele orientate, esențială în definirea noțiunii de vector liber.

Definiție. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Dacă \overrightarrow{AB} este echipolent cu \overrightarrow{CD} , atunci vom scrie $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Temă. Să se demonstreze implicația $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ (fig. I. 5).

Teoremă. Relația de echipolență pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență.

Demonstrație. Relația de echipolență este reflexivă, simetrică și tranzitivă deoarece fiecare dintre relațiile „aceeași direcție”, „același sens” și „aceeași lungime” satisfac aceste trei proprietăți.

Prelungim relația de echipolență și la segmentele orientate nule: toate segmentele orientate nule sînt echipolente între ele. Astfel obținem o relație de echipolență pe mulțimea tuturor segmentelor orientate din plan care este o relație de echivalență.

Definiție. Clasele de echivalență ale segmentelor orientate, relative la relația de echipolență, se numesc vectori liberi.

Cu alte cuvinte un *vector liber* este o submulțime a mulțimii tuturor segmentelor orientate care se bucură de proprietățile: (1) este formată din segmente echipolente între ele și (2) conține toate segmentele echipolente cu un segment fixat al său. Fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un *reprezentant* al clasei. Direcția, sensul și lungimea care sînt respectiv comune tuturor segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc



Fig. I. 5

direcția, sensul și lungimea vectorului liber. Intuitiv vectorul liber poate fi gândit ca un segment orientat care migrează în plan păstrându-și direcția și sensul.

Vectorii liberi se notează cu litere mici cu bară deasupra \vec{a}, \vec{b}, \dots , iar în desen sînt reprezentanți printr-unul dintre segmentele orientate echipolente care definesc clasa numită vector. În contextul reprezentanților vectorii liberi se mai notează și prin $\overline{AB}, \overline{CD}, \dots$; evident $\vec{AB} \in \overline{AB}$, adică \vec{AB} este un reprezentant al lui \overline{AB} .

Presupunem că am fixat o unitate de măsură (etalon) pentru lungimile segmentelor neorientate. În acest caz lungimea unui vector liber va fi dată printr-un număr real pozitiv care reprezintă măsura comună a tuturor segmentelor neorientate corespunzătoare segmentelor orientate din clasa numită vector, în raport cu unitatea de măsură. Notății pentru lungime: $\|\vec{a}\|, \|\overline{AB}\|, d(A, B)$.

Vectorul liber caracterizat prin faptul că are lungimea zero, iar direcția și sensul sînt nedeterminate se numește *zero sau vector nul*. El se notează cu $\vec{0}$ și este reprezentat de orice segment orientat \overline{AA} .

Un vector de lungime unu se numește *versor sau vector unitar (unitate)*.

Vectorii liberi care au aceeași direcție se numesc *vectori coliniari*. Vectorul zero este coliniar cu orice alt vector. Reprezentanții vectorilor coliniari sînt segmente orientate coliniare sau paralele. Doi vectori coliniari care au aceeași lungime însă cu sensuri opuse se numesc *vectori opuși*. Dacă unul dintre ei este notat cu \vec{a} , atunci opusul său este notat cu $-\vec{a}$ (fig. 1. 6).

Doi vectori liberi \vec{a} și \vec{b} sînt *egali*, și se scrie $\vec{a} = \vec{b}$, dacă reprezentanții lor sînt echipolenți sau, echivalent, dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Notăm planul cu p și mulțimea vectorilor liberi din plan cu V . În p fixăm un punct O pe care îl vom numi *origine*. Oricărui alt punct $M \in p$ îi corespunde un vector liber și numai unul $\overline{OM} \in V$ al cărui reprezentant este segmentul orientat \overline{OM} . Într-adevăr, dacă $M \neq M'$, atunci $\overline{OM} \neq \overline{OM'}$ și deci $\overline{OM} \neq \overline{OM'}$. Reciproc, oricărui vector \vec{r} îi corespunde un punct M și numai unul, astfel încît \overline{OM} să reprezinte pe \vec{r} . Vectorul \overline{OM} se numește *vectorul de poziție* al punctului M față de punctul origine O , iar observațiile precedente se rezumă prin teorema următoare.

Teoremă. Fie O punctul origine. Funcția care asociază fiecărui punct $M \in p$ vectorul său de poziție $\overline{OM} \in V$ este o bijecție între p și V .

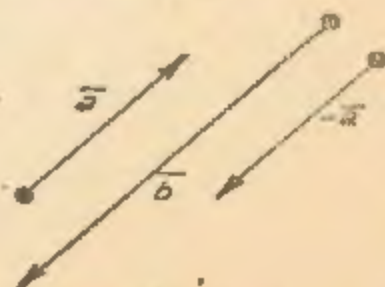


Fig. 1. 6

1. Fie O un punct din plan și \overrightarrow{AB} un segment orientat. Să se figureze:

1) mulțimea C a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași lungime cu \overrightarrow{AB} ;

2) mulțimea D a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași direcție cu \overrightarrow{AB} ;

3) mulțimea S a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au același sens cu \overrightarrow{AB} .

Să se găsească: $C \cup D$, $C \cap D$; $C \cup S$, $C \cap S$; $D \cup S$, $D \cap S$.

2. Fie d o dreaptă și \overrightarrow{AB} un segment orientat. Să se determine mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe d care au aceeași direcție și aceeași lungime cu \overrightarrow{AB} . Să se formuleze și să se rezolve o problemă analogă pentru cercul de centru O și rază r .

3. Fie O un punct din plan. Să se arate că aplicația care asociază fiecărui vector liber reprezentantul său cu originea O este o bijecție între mulțimea vectorilor liberi și mulțimea segmentelor orientate cu originea O .

§ 2. Adunarea vectorilor

Fie punctele O, A, B și O', A', B' . Dacă $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ și $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, atunci $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$.

Lăsând pe seama cititorului celelalte cazuri, noi ne vom referi la cazul din figura I. 7: $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ implică $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{OO'}$, iar $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ implică $\overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{AA'}$; prin tranzitivitate $\overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{BB'}$ și deci $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$. Această observație stă la baza definiției sumei a doi vectori liberi.

Definiție. Fie \vec{a} și \vec{b} doi vectori liberi. Fie \overrightarrow{OA} un reprezentant al vectorului \vec{a} și \overrightarrow{AB} un reprezentant al vectorului \vec{b} . Vectorul liber \vec{c} reprezentat de segmentul orientat \overrightarrow{OB} se numește suma vectorilor \vec{a} și \vec{b} și se notează $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ sau $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (fig. I. 8).

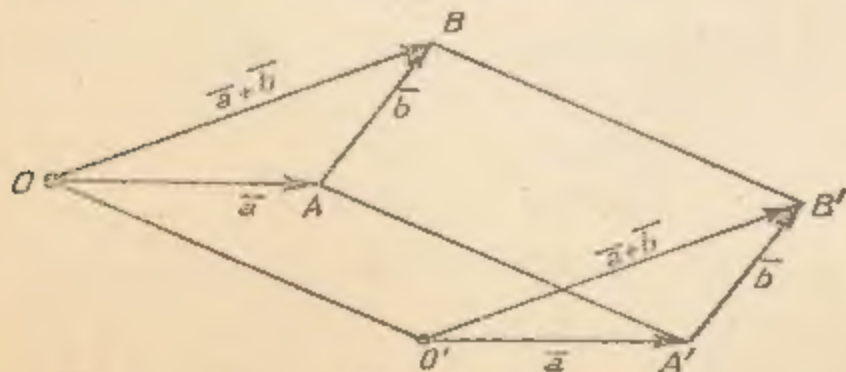


Fig. I. 7

Regula cuprinsă în definiția precedentă, pentru determinarea sumei a doi vectori liberi, se numește *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor

$+: V \times V \rightarrow V$. $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$

este o lege de compoziție internă bine definită deoarece

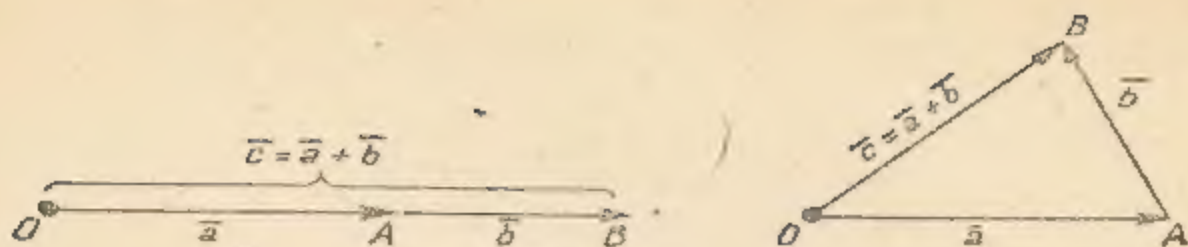


Fig. 1. 8

vectorul liber $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ nu depinde de alegerea punctului O . Într-adevăr, dacă fixăm un alt punct O' și efectuăm construcția din figura I. 7, avem șirul de implicații

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} \sim \vec{O'A'} \Rightarrow \vec{OO'} \sim \vec{AA'} \\ \vec{AB} \sim \vec{A'B'} \Rightarrow \vec{AA'} \sim \vec{BB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{OO'} \sim \vec{BB'} \Rightarrow \vec{OB} \sim \vec{O'B'},$$

adică \vec{OB} și $\vec{O'B'}$ sînt reprezentanți ai aceluiași vector liber.

Te m ă. Să se analizeze cazul coliniarității.

Te o r e m ă. Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăți:

- 1) asociativitate: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;
- 2) $\vec{0}$ este element neutru: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V$;
- 3) opusul lui \vec{a} este simetricul lui \vec{a} : $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$, $\forall \vec{a} \in V$;
- 4) comutativitate: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$.

Demonstrație. Cazurile specifice coliniarității sînt lăsate drept teme. 1) Ținem seama de definiția adunării și urmărim figura I.9: \vec{OB} este reprezentantul sumei $\vec{a} + \vec{b}$, iar \vec{OC} este reprezentantul sumei $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; \vec{AC} este reprezentantul sumei $\vec{b} + \vec{c}$, iar \vec{OC} este reprezentantul sumei $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Rezultă $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, ca vectori liberi definiți de același reprezentant.

Această proprietate permite să scriem $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ în loc de $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ sau de $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2)–3). **Te m ă.**

4) Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Urmărim figura I. 10: \vec{AB} este reprezentantul lui \vec{a} , \vec{BC} este reprezentantul lui \vec{b} , iar \vec{AC} este reprezentantul lui $\vec{a} + \vec{b}$; de asemenea

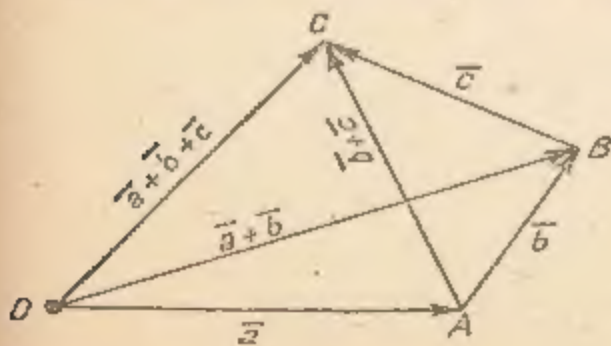


Fig. 1. 9



Fig. 1. 10

Operația care asociază fiecărei perechi (\vec{a}, \vec{b}) diferența $\vec{a} - \vec{b}$ se numește scădere a vectorilor. Proprietățile scăderii vectorilor sînt consecințe ale proprietăților adunării vectorilor.

Comparam proprietățile $\vec{AB} = \vec{AD} - \vec{DB}$, $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$ amănunțit la concluzia că $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{DB}$ de vectori \vec{a}, \vec{b} pot fi înlocuiți cu termenii dintr-o pereche în altă cu condiția să-l înlocuim cu opusul său.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie cunoscut triunghiul ABC și M_0 mijlocul său. Să se verifice că pentru orice punct M din plan avem $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MM}_0 + \vec{MM}_0 + \vec{MM}_0$.

Soluție. (Fig. 1-13) Fie $\vec{a} = \vec{AB}$ și $\vec{b} = \vec{AC}$. Atunci $\vec{MA} = \vec{MM}_0 + \vec{M_0A}$, $\vec{MB} = \vec{MM}_0 + \vec{M_0B}$, $\vec{MC} = \vec{MM}_0 + \vec{M_0C}$. Adunăm aceste egalități membru cu membru: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MM}_0 + \vec{MM}_0 + \vec{MM}_0) + (\vec{M_0A} + \vec{M_0B} + \vec{M_0C})$. Dar $\vec{M_0A} + \vec{M_0B} + \vec{M_0C} = \vec{0}$ (este element neutru), $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MM}_0 + \vec{0} = \vec{MM}_0 + \vec{MM}_0 + \vec{MM}_0$.

2. Fie un dreptunghi $ABCD$. Dacă M este un punct din plan astfel încât $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$, atunci să se exprime suma $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$ ca funcție de \vec{BA} .

Soluție. (Fig. 1-14) Successiv găsim $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = (\text{regula triunghiului}), (\vec{MA} + \vec{MB}) + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0} + \vec{CD} = \vec{0} + \vec{BA} = \vec{BA}$. (Că $\vec{MC} + \vec{MD} = \vec{CD}$ rezultă din faptul că M este mijlocul lui AB și $ABCD$ este dreptunghi.)

3. Să se demonstreze egalitățile

$$(a + c) - (b + c) = a - b, \quad (\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Soluție. Din $(a + c) - (b + c) = a - b$ rezultă pentru $a = b + c$ că $a - b = c$. Din $(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b}$ rezultă că $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Adunăm aceste două egalități: $(a + c) - (b + c) + (\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = a - b + \vec{a} - \vec{b} = 2a - 2b$. Dar $2a - 2b = 2(a - b) = 2c$. Deci $2c = 2(a - b)$, adică $c = a - b$. Înlocuim c în prima egalitate: $(a + (a - b)) - (b + (a - b)) = a - b$. Adunăm $(a + c) - (b + c) = a - b$ cu $(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b}$: $(a + c) - (b + c) + (\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = (a - b) + (\vec{a} - \vec{b}) = (a - b) + \vec{0} = a - b$.



Fig. 1.13



Fig. 1.14

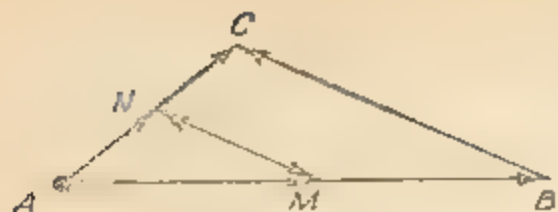


Fig. I. 15

4. Fie triunghiul ABC și M, N respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$. Să se arate că $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$.

Soluție (fig. I. 15). Mai întâi $BC = AC - AB$. Pe de altă parte, $AC = AN + NC = AN + AN$, $AB = AM + MB = AM + AM$. Rezultă $BC =$

$$= (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN}) - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN}) + (0 - \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN} + (0 - \overrightarrow{AM})) + (\overrightarrow{AN} + (0 - \overrightarrow{AM})) = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}.$$

5. Asupra punctului material M din plan acționează forțele $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ca în figura I.16. Știind că direcțiile forțelor \vec{f}_1 și \vec{f}_2 sunt ortogonale, ca unghiul dintre direcțiile forțelor \vec{f}_2 și \vec{f}_3 este de 45° și că $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = 1/2$ daN, $\|\vec{f}_3\| = 3$ daN, să se determine direcția, sensul și mărimea forței rezultante ce acționează asupra punctului M .

Soluție. Regula paralelogramului arată că \vec{r}_1 este rezultanta (suma) forțelor \vec{f}_1 și \vec{f}_2 . Direcția și sensul lui \vec{r}_1 sînt indicate pe figură, iar lungimea lui \vec{r}_1 este $\|\vec{r}_1\| = \sqrt{\|\vec{f}_1\|^2 + \|\vec{f}_2\|^2} = 2$ daN. Adunînd pe \vec{r}_1 cu \vec{f}_3 (regula paralelogramului) găsim rezultanta calculată $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{f}_3$.

Unghiul ascuțit dintre direcția lui \vec{r}_1 și direcția lui \vec{r} , iar β unghiul ascuțit dintre direcția lui \vec{f}_3 și direcția lui \vec{r} . Evident $\alpha = \beta + 45^\circ$, iar β este mai mic decît 45° . Din figura I.16 se observă că $\lg \alpha = \frac{\|\vec{f}_3\|}{\|\vec{r}_1\|}$, adică $\alpha = \arctg \frac{3}{2}$. Rezultă $\beta = \arctg \frac{3}{2} - 45^\circ$ și așadar direcția rezultantei \vec{r} este precizată în raport cu direcția lui \vec{f}_3 . Sensul lui \vec{r} este arătat pe figură, iar $\|\vec{r}\| = \sqrt{\|\vec{r}_1\|^2 + \|\vec{f}_3\|^2} = \sqrt{11}$ daN.

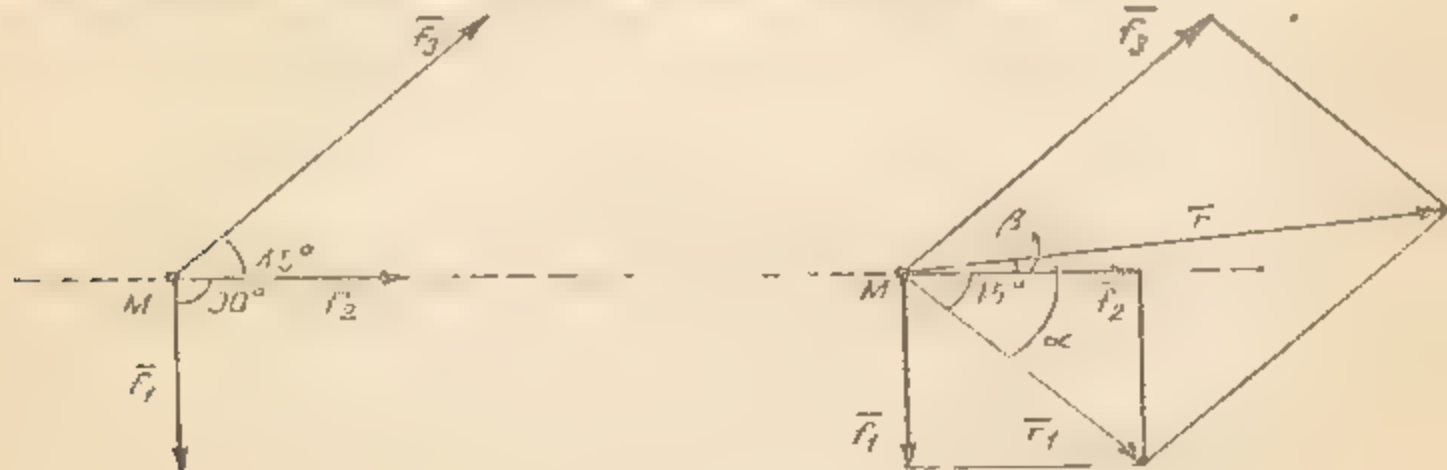


Fig. I. 16

§ 3. Înmulțirea vectorilor cu numere reale

Fie \mathbb{R} mulțimea numerelor reale, iar V mulțimea vectorilor liberi din plan.

Definiție. Fie $t \in \mathbb{R}$ și $\vec{a} \in V$. Prin produsul dintre vectorul \vec{a} și numărul real t vom înțelege vectorul $t\vec{a}$ definit astfel:

1) dacă $\vec{a} \neq 0$ și $t \neq 0$, atunci $t\vec{a}$ este vectorul care are aceeași direcție cu \vec{a} , același sens cu \vec{a} dacă $t > 0$ și sens contrar dacă $t < 0$, lungimea $|t| \|\vec{a}\|$ (fig. 1. 17);

2) dacă $\vec{a} = 0$ sau $t = 0$, atunci $t\vec{a} = 0$.

Din definiție decurge că $t\vec{a}$ este un vector coliniar cu \vec{a} .

Exemple. 1) Vectorul $(-1)\vec{a}$ are aceeași direcție cu \vec{a} , sensul contrar sensului lui \vec{a} și lungimea egală cu lungimea lui \vec{a} . De aceea $(-1)\vec{a}$ este opusul lui \vec{a} , adică $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

2) Vectorul $3\vec{a}$ are direcția lui \vec{a} , sensul lui \vec{a} și lungimea egală cu triplul lungimii lui \vec{a} .

3) Vectorul $-\frac{1}{2}\vec{a}$ are direcția lui \vec{a} , sensul contrar lui \vec{a} și lungimea egală cu jumătate din lungimea lui \vec{a} .

4) Oricărui vector \vec{a} de lungime $\|\vec{a}\| > 0$ i se asociază un vector $\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$ avînd aceeași direcție și același sens cu \vec{a} , numit *versorul* lui \vec{a} . Într-adevăr, $\|\vec{a}_0\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \right\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \|\vec{a}\| = 1$.

1. Relația de definiție pentru \vec{a}_0 este echivalentă cu $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{a}_0$.

Aplicația definită pe $\mathbb{R} \times V$ cu valori în V care asociază fiecărei perechi ordonate (t, \vec{a}) vectorul $t\vec{a}$ este o lege de compoziție externă între elementele lui \mathbb{R} și ale lui V numită *înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale*. În contextul acestei operațiuni numerele reale se mai numesc și *scalari*, iar operația în sine *înmulțirea vectorilor liberi cu scalari*.

Teoremă. *Înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale are următoarele proprietăți.*

$$1) 1\vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in V;$$

$$2) s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a} \in V;$$

3) *distributivitate față de adunarea numerelor reale:*

$$(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a} \in V;$$

4) *distributivitate față de adunarea vectorilor:*

$$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V.$$

Demonstrație. Relația 1) este imediată. Dacă numerele reale sau vectorii sînt zero, atunci și relațiile 2), 3), 4) sînt imediate.

2) - 3). **Te m ă.**

4. Cazul coliniarității îl lășăm drept temă.

Fie \vec{OA} reprezentantul vectorului \vec{a} și \vec{AB} reprezentantul vectorului \vec{b} . Atunci \vec{OB} este reprezentantul vectorului $\vec{a} + \vec{b}$ (fig. 1. 18).

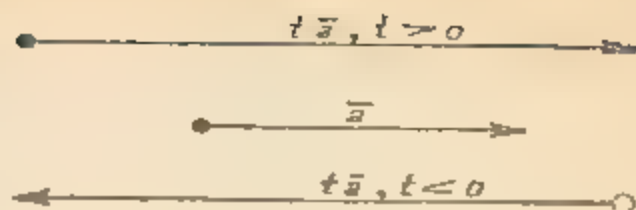


Fig. 1. 17

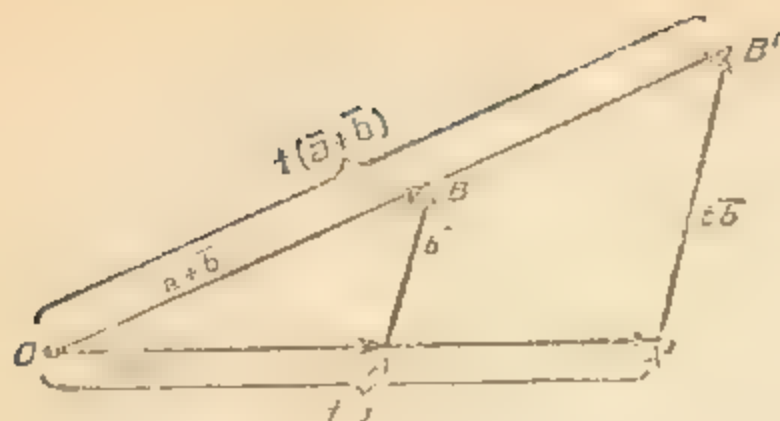


Fig. 1.18

Presupunem $t > 0$ și notăm cu $\overrightarrow{OA'}$ reprezentantul vectorului ta și cu $\overrightarrow{OB'}$ reprezentantul vectorului $t(b)$. Se observă că $OAB \sim OA'B'$ (fig. 1.18) avînd un unghi comun și laturile, care determină acest unghi, de lungimi proporționale. Rezultă $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{AB}$, adică $\overrightarrow{A'B'}$ este reprezentantul vectorului

$t(b-a)$. Deci $\overrightarrow{OB'}$ este reprezentantul sumei $ta + t(b-a)$, adică $t(a+b) = a + tb$. Cazul $t < 0$ se tratează analog.

Se prezentăm câteva consecințe directe ale definiției și ale teoremei precedente, care sînt deosebit de utile în aplicarea tehnicilor de calcul vectorial (convențiile sînt aceleași deosebit de utile):

$$-(t\vec{a}) = (-t)\vec{a} = t(-\vec{a}),$$

$$(s-t)\vec{a} = s\vec{a} + (-t)\vec{a} = s\vec{a} + (-t)\vec{a} = s\vec{a} - t\vec{a},$$

$$s(\vec{a} - \vec{b}) = s[\vec{a} + (-\vec{b})] = s\vec{a} + (-s)\vec{b} = s\vec{a} - s\vec{b},$$

$\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$. Ca urmare, ordinea și succederea vectorilor în adunare și în înmulțirea cu vectori nu influențează rezultatul operațiilor de adunare și înmulțirea cu vectori, adunarea și înmulțirea cu vectori sînt asociative.

Proprietățile adunării vectoriale, date în teorema din § 2, și proprietățile înmulțirii vectoriale cu numere reale, date în teorema de mai sus, sînt pămîntul, astfel că V este o structură spațiu vectorial peste \mathbb{R} . Dacă V este un spațiu vectorial peste \mathbb{R} , atunci V va fi numit spațiu vectorial al vectorilor liberi din plan.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $\vec{a} \in V$ și $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\vec{a} + \dots + \vec{a} = n\vec{a}$.

Soluție. Urmărind figura 1.19 se observă că $\vec{a} + \dots + \vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots +$

$+\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}$, iar $\overrightarrow{OA_n}$ are direcția lui \vec{a} , sensul lui \vec{a} și lungimea $n\|\vec{a}\|$.

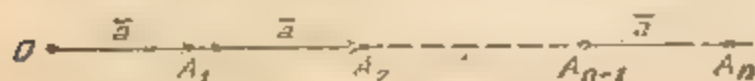


Fig. 1.19

Notă. Relația din această problemă poate fi privită ca o consecință a teoremei din acest paragraf.

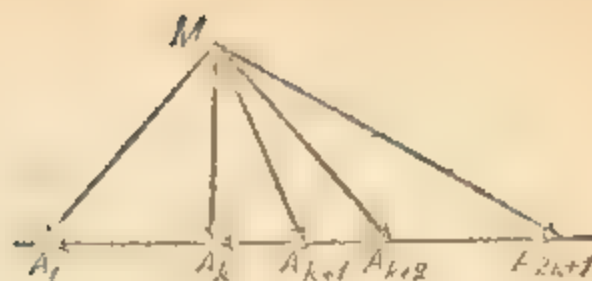


Fig. 1. 20

2. Fie d o dreaptă pe care se află $n \geq 2$ puncte echidistante. Se notează cu O mijlocul segmentului $[A_1, A_n]$ și cu M un punct arbitrar din plan, exterior dreptei d . Să se arate că

$$MA_1 \vdash \beta A_2 \vdash \dots \vdash \beta 1_n \vdash n HO, \quad n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

[illegible]

$$\sum_{i=1}^n M U_i, \quad \sum_{i=1}^n (M U_i + \overline{O U_i}) = \sum_{i=1}^n M U_i + \sum_{i=1}^n O \tilde{U}_i, \quad \sum_{i=1}^n M U_i = n M \bar{U}$$

2. $\vec{AB} = \vec{D} - \vec{B}$. Se știe că vectorii liberi \vec{AD} , \vec{AC} și \vec{BC} sunt coplanari, deci există un scalar λ astfel încât $\vec{AD} = \lambda \vec{AC} + \mu \vec{BC}$. Înlocuim în (2) și obținem:

(fig. 1-24). Relembre $AD \perp BC$, \overrightarrow{AD} coincide com o seu \overrightarrow{AD} , $d(A, B) = 2d(A, D)$.
 Logo, $2b = AC$ e $2b = AB$, ou seja, $a = b$ e $a = b$ (caso 1) e $a = b$.
 Assim, $a = b$ e $a = b$, ou seja, $a = b$ e $a = b$ e $a = b$ e $a = b$.
 Portanto, $a = b$ e $a = b$, ou seja, $a = b$ e $a = b$ e $a = b$ e $a = b$.
 Logo, $a = b$ e $a = b$, ou seja, $a = b$ e $a = b$ e $a = b$ e $a = b$.

da se u tom slučaju $a = i + \frac{1}{2} = 2i - j$. Sâ se cel uleze $\tilde{a} + b$,

Soluție. Ținând seama de proprietățile adunării vectorilor și proprietățile înmulțirii dintre vectori și numere reale, obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\hat{i} + \hat{j}) \cdot (\hat{i} - \hat{j}) = (\hat{i} \cdot \hat{i}) + (\hat{i} \cdot (-\hat{j})) + (\hat{j} \cdot \hat{i}) + (\hat{j} \cdot (-\hat{j})) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\hat{i} + \hat{j}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j}) = \hat{i} \cdot 2\hat{i} + \hat{i} \cdot (-\hat{j}) + \hat{j} \cdot 2\hat{i} + \hat{j} \cdot (-\hat{j}) \\ &= 2 - 1 + 2 - 1 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + y)(\bar{a} - \bar{b}) &= (x - y)(\bar{a} + \bar{b}) = (x + y)(\bar{i} + \\ &+ 2\bar{j}) = (x - y)(3\bar{i}) = -x\bar{i} + 2x\bar{j} - y\bar{i} + 2y\bar{j} = \\ &= -3x\bar{i} + 3y\bar{i} = (2y - 4x)\bar{i} + (2x + 2y)\bar{j}. \end{aligned}$$

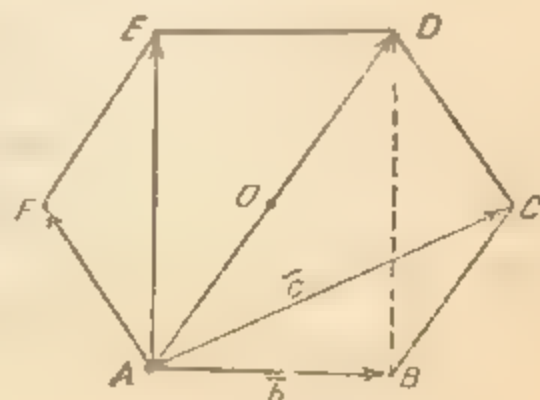


Fig. I. 21

5. Să se discute și să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \lambda x + y = a \\ x + \lambda y = b, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluție În ambele ecuații înmulțim ambele părți cu λ , apoi scădem parte cu parte din prima ecuație. Rezultă $(1 - \lambda^2)y = a - \lambda b$.

Dacă $\lambda \neq \pm 1$, atunci ecuația în y are soluție unică $y = \frac{1}{1 - \lambda^2}(a - \lambda b)$ și deci sistemul are soluția unică (x, y) unde

$$x = \frac{1}{1 - \lambda^2}(b - \lambda a), \quad y = \frac{1}{1 - \lambda^2}(a - \lambda b).$$

Dacă $\lambda = \pm 1$ și $a = \lambda b$, atunci ecuația în y este o identitate și sistemul are infinite soluții (x, y) , unde $x = b - \lambda y$, $y \in V$.

Dacă $\lambda = \pm 1$ și $a \neq \lambda b$, atunci ecuația în y este o imposibilitate, deci sistemul are soluții.

§ 4. Dependință liniară

Fie V spațiul vectorial al vectorilor liberi din plan. Adunarea vectorilor și înmulțirea vectorilor cu numere reale generează expresii de tipul $b = \frac{1}{2}a + 2d$, $e = \frac{1}{2}i + \pi j$, etc.

Fie $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$, $n \in \mathbb{N}^*$. Orice vector de forma

$$\vec{a} = t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_n \vec{a}_n, \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$$

se numește *combinație liniară* a celor n vectori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Definiție. Vectorii $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ se numesc *liniar dependenți* dacă există n numere reale t_1, \dots, t_n nu toate nule astfel încât

$$t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Vectorii $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ se numesc *liniar independenți* dacă nu sînt liniar dependenți, adică dacă orice relație

$$t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_n \vec{a}_n = \vec{0} \text{ implică } t_1 = \dots = t_n = 0.$$

Observații. 1) Vectorul liber zero este liniar dependent $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

2) Orice vector liber nenul este liniar independent. $t\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow t = 0$.

3) Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci vectorii \vec{a} , \vec{b} sînt liniar dependenți.

4) Dacă $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sînt liniar dependenți atunci și $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_{n+p}$ sînt tot liniar dependenți. O parte dintre vectorii liniar independenți $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ nu pot fi tot vectorii liniar independenți.

Vectorii $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sînt liniar dependenți dacă și numai dacă cel puțin unul dintre ei se poate exprima ca o combinație liniară de ceilalți vectori. Într-adevăr, pentru $t_i \neq 0$, relația $t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_{i-1} \vec{a}_{i-1} + t_i \vec{a}_i + t_{i+1} \vec{a}_{i+1} + \dots + t_n \vec{a}_n = \vec{0}$ este echivalentă cu

$$\vec{a}_i = -\frac{t_1}{t_i} \vec{a}_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} \vec{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} \vec{a}_{i+1} - \dots - \frac{t_n}{t_i} \vec{a}_n.$$

Teoremă. Vectorii liberi $\vec{a}, \vec{b} \in V$ sînt linear dependenți dacă și numai dacă sînt coliniari.

Demonstrație. Presupunem că vectorii $\vec{a}, \vec{b} \in V$ sînt linear dependenți, adică $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Fie $s \neq 0$. Ca im $\vec{b} = -\frac{r}{s}\vec{a}$ și deci \vec{b} și \vec{a} sînt coliniari (dacă $s = 0$ sau dacă unul dintre vectori este $\vec{0}$, atunci funcționăm cu convenția că vectorul zero are aceeași direcție cu orice vector).

Reciproc, presupunem că $\vec{a}, \vec{b} \in V$ sînt coliniari. Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci vectorii \vec{a}, \vec{b} sînt evident linear dependenți. În caz contrar, cînd $\vec{a}, \vec{b} \in V - \{0\}$, notăm cu \vec{a}_0 versorul lui \vec{a} și cu \vec{b}_0 versorul lui \vec{b} . Avem $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{a}_0$, $\vec{b} = \|\vec{b}\| \vec{b}_0$ și $\vec{b}_0 = \pm \vec{a}_0$. Pentru $\vec{b}_0 = \vec{a}_0$ avem $\vec{b} = \|\vec{b}\| \vec{a}_0 = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$ și deci $\vec{b} = t\vec{a}$, unde $t = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}$. Dacă $\vec{b}_0 = -\vec{a}_0$, atunci $\vec{b} = -\|\vec{b}\| \vec{a}_0 = -\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$ și deci $\vec{b} = -t\vec{a}$, unde $t = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}$. Deci în ambele cazuri $\vec{b} = t\vec{a}$ sau $\vec{b} = -t\vec{a}$, unde $t \neq 0$, ceea ce înseamnă că \vec{b} și \vec{a} sînt linear dependenți. Analog se justifică cazul $\vec{b}_0 = \vec{a}_0$ sau $\vec{b}_0 = -\vec{a}_0$.

Deoarece dependența lineară în V este echivalentă cu coliniaritatea rezultă că orice doi vectori liberi necoliniari sînt linear independenți.

Teoremă. Oricare trei vectori liberi din V sînt linear dependenți.

Demonstrație. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. Dacă doi dintre ei sînt coliniari, atunci cei trei sînt linear dependenți și deci $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt linear dependenți. Presupunem acum că \vec{a} și \vec{b} nu sînt coliniari, adică sînt linear independenți. Fie \vec{OA}, \vec{OB} și \vec{OC} reprezentanții lui \vec{a}, \vec{b} , și \vec{c} (fig. I.23). Se observă că $OC = OM + ON$, unde OM și ON sînt coliniari cu OA și OB respectiv. Deci $OC = rOA + sOB$ sau altfel spus, $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$, adică $r\vec{a} + s\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

Acesta teoremă arată că numărul maxim de vectori linear independenți din V este 2.

Definiție. Numărul maxim de vectori linear independenți din V , adică 2, se numește dimensiunea lui V . O pereche ordonată (\vec{a}, \vec{b}) de vectori liberi necoliniari (linear independenți) se numește bază a lui V .

Fie (\vec{a}, \vec{b}) o bază în V , fie \vec{c} un vector oarecare din V și $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ reprezentanții vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. După cum am arătat în demonstrația teoremei precedente (fig. I.23), relația $OC = OM + ON$ este totuna cu

$$\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b},$$

adică orice vector liber \vec{c} poate fi exprimat ca o combinație lineară de \vec{a} și \vec{b} . Se observă că

$$r = \pm \frac{d(O, M)}{d(O, A)}, \quad s = \pm \frac{d(O, N)}{d(O, B)},$$

pentru fiecare luîndu-se $+$ sau $-$ după cum vectorii respectivi OM și OA , ON și OB sînt

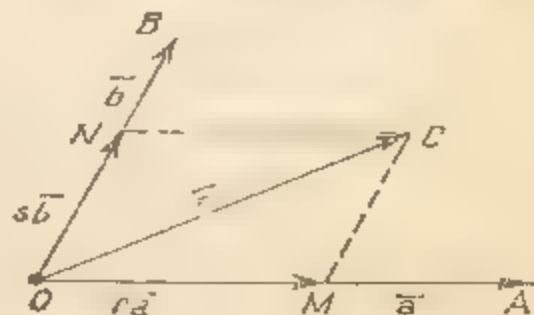


Fig. I.23

de a avea același sens sau de sens opus. Deseori se spune că vectorul \vec{c} a fost *descompus* în vectorii \vec{a} și \vec{b} . ~~Descompunerea~~ Descompunerea lui \vec{c} după vectorii bazei este unică. Într-adevăr, sînt adevărate implicațiile:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}, \vec{b} & \text{ lin. indep.} \\ \vec{c} &= r_1 \vec{a} + s_1 \vec{b} \\ \vec{c} &= r_2 \vec{a} + s_2 \vec{b} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \vec{a}, \vec{b} &= \text{lin. indep.} \\ (r_1 - r_2)\vec{a} + (s_1 - s_2)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_1 - r_2 = 0, s_1 - s_2 = 0,$$

$$\text{adică } r_1 = r_2, s_1 = s_2.$$

Nu mercele reale r și s definite prin $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$ se numesc *coordonatele* vectorului liber \vec{c} în raport cu \vec{a}, \vec{b} . Din această fiecare vector \vec{c} în afara celui perpendicolar pe planul (\vec{a}, \vec{b}) are o singură reprezentare în baza (\vec{a}, \vec{b}) obținută necorespunzător într-un mod în V . Acesta răspundând năd se numește sistem de coordonate pe V determinat de baza (\vec{a}, \vec{b}) , și se denotă prin scrierea alăturată numelui, sau pe scurt prin $\vec{c}(r, s)$ adică $\vec{c}(r, s)$.

Cazuri particulare: $0(0, 0)$, $\vec{a}(1, 0)$, $\vec{b}(0, 1)$.

Teoremă. Fie \vec{c}_1, \vec{c}_2 doi vectori liberi dați prin coordonatele lor în raport cu o bază (\vec{a}, \vec{b}) fixată în V .

1) \vec{c}_1 și \vec{c}_2 sînt egali dacă și numai dacă au coordonatele corespunzătoare egale, adică

$$\vec{c}_1 = \vec{c}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, s_1 = s_2.$$

2) A aduna pe \vec{c}_1 cu \vec{c}_2 înseamnă adăugarea coordonatelor corespunzătoare, adică $\vec{c}_1 + \vec{c}_2$ are coordonatele $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$.

3) A înmulți pe \vec{c}_1 cu numărul real t înseamnă înmulțirea coordonatelor lui \vec{c}_1 cu t , adică

$$t\vec{c}_1 \text{ are coordonatele } (tr_1, ts_1).$$

4) \vec{c}_1 este colinear cu \vec{c}_2 dacă și numai dacă coordonatele lor sînt proporționale. Într-adevăr, $\vec{c}_1 = t\vec{c}_2$ înseamnă $(r_1, s_1) = t(r_2, s_2)$, adică $r_1 = tr_2$ și $s_1 = ts_2$. Pentru a verifica această condiție găsim

$$\vec{c}_1 = r_1 \vec{a} + s_1 \vec{b} = (tr_2)\vec{a} + (ts_2)\vec{b} = t(r_2\vec{a} + s_2\vec{b}) = t\vec{c}_2. \quad \text{și invers, dacă } \vec{c}_1 = t\vec{c}_2 \text{ atunci } r_1\vec{a} + s_1\vec{b} = t(r_2\vec{a} + s_2\vec{b}) = (tr_2)\vec{a} + (ts_2)\vec{b}.$$

1), 3), 4) Temă.

PROBLEME REZOLVATE

1) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, iar α, β, γ măsurile unghiurilor unui triunghi. Se poate considera ar fi vectorii $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, următorii vectori sînt liniari dependenți:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) $a\vec{x} + b\vec{y},$ | $(\sin \alpha)\vec{x} + (\sin \beta)\vec{y};$ |
| 2) $b\vec{y} + c\vec{z},$ | $(\sin \beta)\vec{y} + (\sin \gamma)\vec{z};$ |
| 3) $c\vec{z} + a\vec{x},$ | $(\sin \gamma)\vec{z} + (\sin \alpha)\vec{x}.$ |

Soluție Ne oprim la cazul 1), celelalte tratăm în mod analog. Teorema sinusurilor ne dă
 $a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta$. Războim $a\bar{x} + b\bar{y} = (2R \sin \alpha)\bar{x} + (2R \sin \beta)\bar{y} = 2R[\sin \alpha \bar{x} + \sin \beta \bar{y}]$.
 Deci $1 - a\bar{x} + b\bar{y} = 2R[\sin \alpha \bar{x} + \sin \beta \bar{y}] = 0$. Din care există o relație
 între \bar{x} și \bar{y} (1, 2R) care nu este nulă. Într-o dată cu vectorul zero, și deci
 $a\bar{x} + b\bar{y}, (\sin \alpha)\bar{x} + (\sin \beta)\bar{y}$ sunt linear dependenți.

2. Fie \bar{a}, \bar{b} doi vectori liniari independenți. Ce relație trebuie să satisfacă
 numerele x, y, z, u pentru ca vectorii $x\bar{a} + y\bar{b}, z\bar{a} + u\bar{b}$ să fie linear dependenți?

Soluție Egalitatea $r(x\bar{a} + y\bar{b}) + s(z\bar{a} + u\bar{b}) = 0$ este echivalentă cu $(rx + sz)\bar{a} + (ry + su)\bar{b} = 0$. Acela din nou înseamnă că \bar{a}, \bar{b} sunt linear dependenți
 dacă și numai dacă $rx + sz = 0, ry + su = 0$. Aici pentru fiecare (r, s) avem o soluție unică în
 funcție de r și s . Sistemul admite numai soluția $r = 0, s = 0$ dacă și numai dacă $xu - yz \neq 0$.

3. Un corp cu greutatea de 200 N este suspendat cu ajutorul unei bare
 cilindrice dintr-un capăt, de alt capăt fiind prinsă, prin mijlocul unei lănci
 care este înclinată la 60°. Să se determine mărimea tensiunii în lănci și mărimea
 de compresie a barei.

Soluție Izolăm punctul M de sistem și figurăm forțele care acționează asupra lui (fig.
 1.23). Forța de tracțiune a lăncii \vec{T} este în direcția lăncii, forța de compresie a barei
 este în direcția barei, în cazurile acestea forțele \vec{P} și \vec{G} au aceeași direcție
 și sens. Este desigur după vectori \vec{P}, \vec{G} . Rezultă $\|\vec{T}\| = \|\vec{G}\| \cos 60^\circ =$
 $= 200 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N}, \|\vec{P}\| = \|\vec{G}\| \cos 60^\circ = 100 \text{ N}.$

4. Cu teorema lui AB' a lui Heine $\vec{D}, \vec{A}, \vec{A}'$ se formează un vector
 în V pe baza (\vec{a}, \vec{b}) . Să se arate că cu o dată
 vectorii $\vec{D}, \vec{A}, \vec{A}'$ sunt liniar independenți, unde $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sunt
 vectorii în V pe baza (\vec{a}, \vec{b}) . Să se arate că $[\vec{A}\vec{A}_1], [\vec{B}\vec{B}_1], [\vec{C}\vec{C}_1]$ pot fi luate ca
 baze.

Fig. 1.23

Fig. 1.24

Soluție (fig. I 24). Se observă că $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ adică $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ sau, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
 Deci: 1) Sunt coordonatele vectorului \vec{c} în raport cu baza (\vec{a}, \vec{b}) .

2) Analog,

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{b} - (\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

Asa, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sunt respectiv coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ și $\overrightarrow{CC_1}$ față de baza (\vec{a}, \vec{b}) .

În general, segmentele reorientate corespunzătoare reprezentanților vectorilor liberi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pot fi laturile unui triunghi dacă și numai dacă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. În cazul nostru, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ adică $[\overrightarrow{AA_1}] + [\overrightarrow{BB_1}] + [\overrightarrow{CC_1}]$ pot fi laturile unui triunghi.

5. Fie un triunghi ABC , iar (AB, AC) baza lui V .

1) Fie P simetricul lui B în raport cu ℓ . Să se găsească coordonatele vectorului \overrightarrow{AP} .

2) Se dau punctele O și R astfel încât $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele vectorilor \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OR} și să se arate că punctele P , Q , R sunt coliniare.

Soluție (fig. I 25). 1) Ținând figuri ei putem scrie suma de ipoteză găsim $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, adică $(-1, 2)$ ca lă cu coordonatele lui \overrightarrow{AP} în raport cu baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Analog,

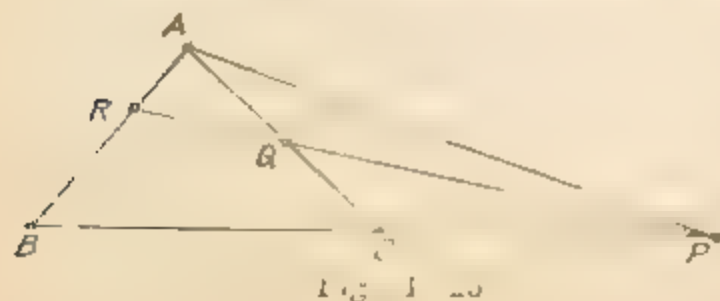
$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 4\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 4\overrightarrow{RQ},$$

adică $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ sunt respectiv coordonatele vectorilor \overrightarrow{RQ} , \overrightarrow{RP} în raport cu baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Punctele P , Q , R sunt coliniare deoarece se verifică relația $\overrightarrow{RP} = 4\overrightarrow{RQ}$ adică reprezentanții \overrightarrow{RP} , \overrightarrow{RQ} sunt coliniari.

6. Se dau $\vec{a}(1, 2)$, $\vec{b}(x - 2y, x + y)$. Să se determine x și y astfel încât $\vec{a} = \vec{b}$.



Soluție. Reamintim că doi vectori raportați la aceeași bază sunt egali dacă și numai dacă au coordonatele corespunzătoare egale. Deci $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x - 2y = 1$, $x + y = 2$. Rezolvând acest sistem găsim

$$x = \frac{5}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

7. Fie (\vec{a}, \vec{b}) o bază în V și vectorii $\vec{u} = (-1, 1)$, $\vec{v} = (\pi, \sqrt{2})$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze, coordonatele vectorilor urmatori

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w},$$

$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w},$$

$$2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w},$$

$$\vec{u} - \vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}.$$

$$\sqrt{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w},$$

$$\vec{u} + \frac{1}{\pi}\vec{v} - 4\vec{w}.$$

Soluție. Într-un calcul tehnic este esențial aceeași neopritanță la unul din caz, celelalte rămânând drept teme.

$\vec{u} + \frac{1}{\pi}\vec{v} - 4\vec{w} = (-\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{\pi}(-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right)$ (istributivitatea față de adunarea vectorilor, asociativitatea și comutativitatea adunării vectorilor), $= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{\pi}(-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) - 2\vec{a} - 6\vec{b}$ (asociativitatea față de adunarea numerelor reale), $= -3\vec{a} + \left(1 + \frac{1}{\pi} - \sqrt{2}\right)\vec{b}$. Deci coordonatele vectorului $\vec{u} + \frac{1}{\pi}\vec{v} - 4\vec{w}$ sînt $\left(-3, 1 + \frac{1}{\pi} - \sqrt{2}\right)$. Acesta poate fi găsit și direct fiind scos că „coordoatele unei sume vectoriale sînt exact algebric ale coordonatelor”.

§ 5. Proiecție ortogonală

1. $\vec{a} \in V$ și d o dreaptă din plan. Notăm reprezentantul lui \vec{a} prin \overrightarrow{AB} . Presupunem că \overrightarrow{AB} nu este nul, iar dreapta AB nu este perpendiculară pe d . Prin A și B ducem dreptele h și k respectiv perpendiculare pe d . Notăm $\{1\} = h \cap d$, $\{B'\} = k \cap d$ și construim $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$ (fig. I.26). Segmentul $\overrightarrow{A'B'}$ este proiecția ortogonală a lui \overrightarrow{AB} sau a lui $\overrightarrow{A'B'}$ pe d .

Teoremă. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de reprezentantul \overrightarrow{AB} al lui \vec{a} .

Demonstrație. Fie \overrightarrow{CD} un alt reprezentant al lui \vec{a} , iar $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{C''D''}$ segmentele orientate construite după același procedeu ca și $\overrightarrow{A'B'}$, respectiv $\overrightarrow{A'B''}$.

Trebuie să arătăm că $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$ (fig. I.26).

Segmentele $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{C'D'}$ au: (1) aceeași direcție deoarece sînt situate pe dreapta d , (2) același sens deoarece B' se află la dreapta lui A' , iar D' se află la dreapta

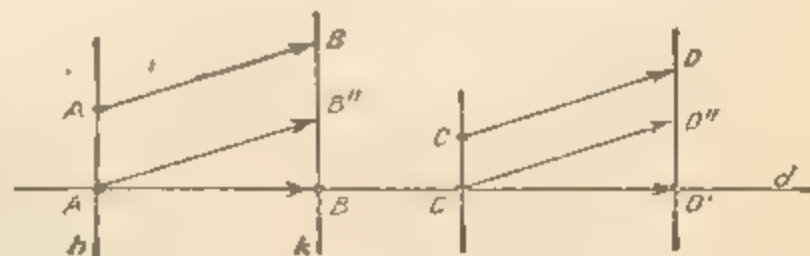


Fig. I.26

lui C' , (3) aceeași lungime deoarece triunghiul $A'B'B''$ este congruent cu triunghiul $C'D'D''$. De aceea $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$.

Dacă dreapta AB este perpendiculară pe d , atunci $A' = B'$ și deci $\overrightarrow{A'B'}$ este segmentul orientat nul. Dacă $a = 0$, adică $A = B$, atunci din nou $A' = B'$ și deci $\overrightarrow{A'B'}$ este segmentul orientat nul.

Explicațiile precedente justifică următoarea definiție.

Definiție. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ se numește proiecția ortogonală a vectorului a pe dreapta d și se notează cu $\pi_d(a)$.

Teoremă. Un vector liber are aceeași proiecție ortogonală pe două drepte paralele.

Demonstrație. Fie vectorul \vec{a} reprezentat de \overrightarrow{AB} și d, d' două drepte paralele. Cazurile $A = F, F \neq B, AB \perp d, d'$ sunt luate în parte separat. Să notăm cu L dreapta perpendiculară pe d care trece prin A și cu L' dreapta perpendiculară pe d' care trece prin F . Să notăm cu $h = L \cap d, k = L' \cap d'$. Rezultă că $FGEA$ este un dreptunghi și deci $\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{FG}$.

Din această teoremă rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă d nu depinde decât de dreapta d . Din această definiție rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber \vec{a} pe dreapta d este un vector liber care aparține lui d , adică în $\pi_d(a)$ este proiecția ortogonală a lui a pe d , $\pi_d(a) \in \pi_d(a)$ vom nota cu $\pi_d(a)$ denumirea de proiecția ortogonală a lui \vec{a} pe vectorul nenul \vec{u} și notația $\pi_u(\vec{a})$.

Teoremă. Fie $\vec{u} \in V - \{0\}$. Pentru orice $\vec{a}, \vec{b} \in V$ și orice λ număr real λ avem

$$\pi_u(\vec{a} + \vec{b}) = \pi_u(\vec{a}) + \pi_u(\vec{b}),$$

$$\pi_u(\lambda \vec{a}) = \lambda \pi_u(\vec{a}).$$

Proprietățile cuprinse în această teoremă arată că $\pi_u: V \rightarrow V, \vec{a} \mapsto \pi_u(\vec{a})$ este ceea ce se numește o funcție liniară.

Fie \vec{a} un vector nenul și \vec{u}_0 vectorul său, adică $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{u}_0, \|\vec{u}_0\| = 1$. Dacă \vec{a} este un vector liber arbitrar, atunci $\pi_u(\vec{a})$ este un vector coliniar cu \vec{u}_0 și deci există un număr real p astfel încât $\pi_u(\vec{a}) = (pr_u \vec{a}) \vec{u}_0$ ($p \in \mathbb{R}$).

Definiție. Numărul real $pr_u \vec{a}$ denotat prin relația $\pi_u(\vec{a}) = (pr_u \vec{a}) \vec{u}_0$ se numește mărimea algebrică a proiecției ortogonale $\pi_u(\vec{a})$.

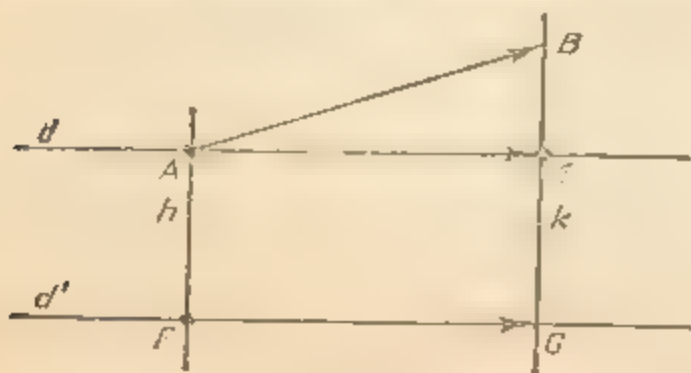
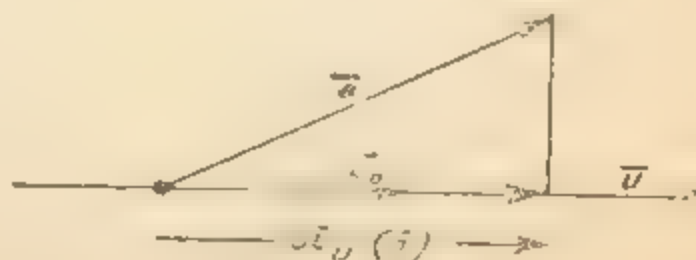


Fig. 1.27



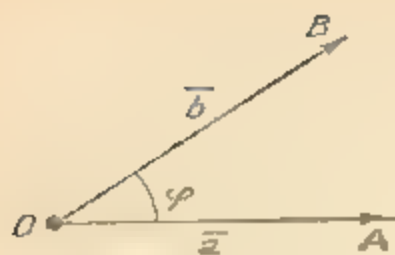


Fig. I. 29

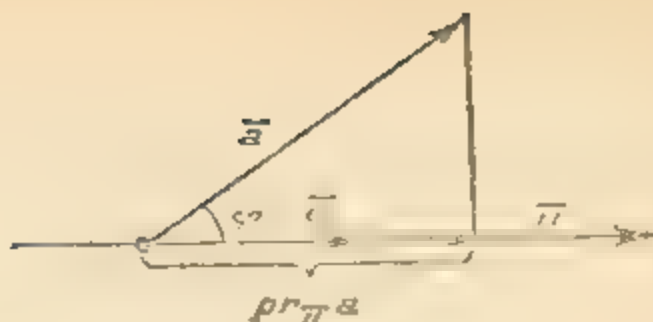


Fig. I. 30

Proprietățile lui π_u implică

$$\text{pr}_u(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_u \vec{a} + \text{pr}_u \vec{b},$$

$$\text{pr}_u(t\vec{a}) = t\text{pr}_u \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall t \in \mathbb{R}.$$

III' \vec{a} și \vec{b} doi vectori liberi nenuli și \vec{OA} , respectiv \vec{OB} reprezentanții acestor vectori. Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de \vec{OA} și \vec{OB} se numește *unghiul* dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} (fig. I. 31). Acest unghi este cunoscut întrucât \vec{O} este reprezentantul nul al vectorului $\vec{0}$ și cel puțin unul dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} este vectorul zero, atunci unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ dintre \vec{a} și \vec{b} este nedeterminat.

Vectorii nenuli \vec{a} și \vec{b} se numesc *ortogonali* dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$.

Adică $\vec{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Unghiul φ dintre vectorii \vec{a} și vectorul nenul \vec{u} permite să se definească numărul $\text{pr}_u \vec{a}$ în funcție de $\|\vec{a}\|$ și de $\cos \varphi$ ($\varphi \in [0, \pi]$),

$$\text{pr}_u \vec{a} = \|\vec{a}\| \cos \varphi.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie doi vectori nenuli \vec{a} și \vec{b} . Ce relație trebuie să aibă între \vec{a} și \vec{b} pentru ca vectorul $\vec{a} + \vec{b}$ să aibă drept bisectoare unghiului determinat de reprezentanții \vec{OA} , \vec{OB} ai lui \vec{a} respectiv \vec{b} . În acest caz, de ce se explică $\pi(\vec{a})$, $\pi(\vec{b})$, $\pi(\vec{a} + \vec{b})$ și relația dintre acești vectori.

Soluție (fig. I. 32). Fie \vec{a} și \vec{b} reprezentanții lui \vec{a} și \vec{b} , figura $APCD$ fiind un paralelogram. Dacă AC este bisectoarea unghiului BAD , atunci $ALCD$ este un romb. Rezultă $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$.

Se observă că $AC \perp BD$, ca diagonale în rombul $APCD$. Notând $\{O\} = AC \cap BD$, segmentul orientat \vec{AO} este reprezentantul lui $\pi_u(\vec{a})$ și al lui $\pi_u(\vec{b})$. Deci $\pi_u(\vec{a}) = \pi_u(\vec{b})$. Pe de altă parte, $\pi_u(\vec{a} + \vec{b}) = \pi_u(\vec{AC}) = \vec{AO} = \vec{OC}$, adică $\pi_u(\vec{a} + \vec{b}) = \pi_u(\vec{a}) + \pi_u(\vec{b})$.

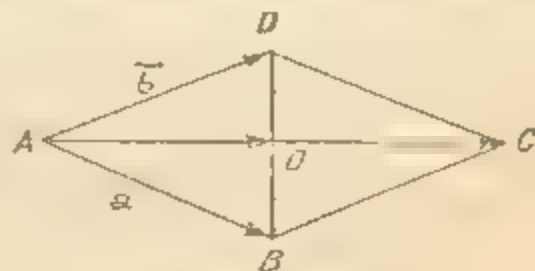


Fig. I. 32

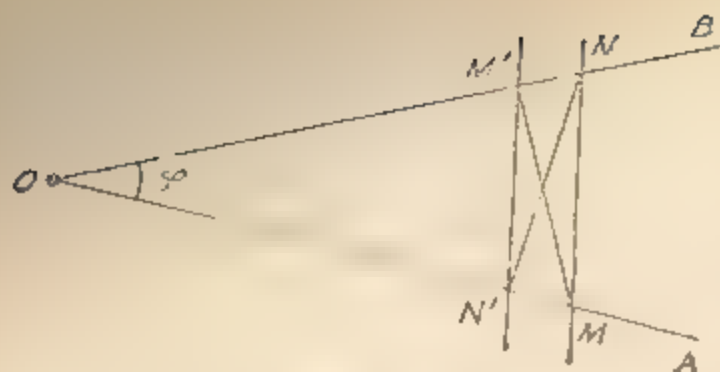


Fig. 1.32

Soluție (fig. 1.32) 1) Evid. at, $\text{pr}_{ON} \overline{OM} = \overline{OM} \cos \varphi = \overline{ON} \cos \varphi = \text{pr}_{OA} \overline{ON}$.

2) Fie $\frac{1}{\|OM\|} \overline{OM}$ vectorul lui OM și $\frac{1}{\|ON\|} \overline{ON}$ vectorul lui ON . Căci $\overline{OM} - \overline{ON} = \overline{OM'} - \overline{ON'}$ $\tau_{ON}(\overline{OM}) = \tau_{OM}(\overline{ON}) = (\text{pr}_{ON} \overline{OM}) \frac{1}{\|ON\|} = \overline{OM} \cos \varphi = (\text{pr}_{OM} \overline{ON}) \frac{1}{\|OM\|} = \overline{ON} \cos \varphi$.
Deci $MN \parallel M'N'$.

Te m ă. Comparați la 2) - soluția cu varianta sintetică.

§6. Produs scalar

Fie a și b doi vectori liberi. Dacă $a \neq \vec{0}$ și $b \neq \vec{0}$, atunci notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre a și b .

Definiție. Numărul real

$$a \cdot b = \begin{cases} \|a\| \cdot \|b\| \cos \varphi, & \text{dacă } a \neq \vec{0}, \text{ și } b \neq \vec{0}, \\ 0, & \text{dacă } a = \vec{0} \text{ sau } b = \vec{0} \end{cases}$$

se numește produsul scalar al vectorilor a și b .

Altfel spus produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul lungimilor lor prin cosinusul unghiului dintre ei, compromisul pentru vectorul zero fiind evident în consens cu definiția inițială.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este un număr strict pozitiv dacă unghiul dintre ei este ascuțit, adică $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, sau strict negativ dacă unghiul dintre ei este obtuz, adică $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Produsul scalar este nul dacă și numai dacă cei doi vectori sunt ortogonali.

Asociind fiecărei perechi de vectori liberi produsul lor scalar obținem o funcție $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ numită *produs scalar* pe V .

Teoremă. Produsul scalar are următoarele proprietăți:

1) *comutativitate*: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in V$;

3) *asociativitate*: $((\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}))$, $\forall \vec{a} \in V, \forall \vec{b}, \vec{c} \in V$;

3b) *distributivitate față de adunare*: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;

4) *pozitivitate*: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$, $\forall \vec{a} \in V$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Demonstrație. 1) Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$; dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\vec{b} \neq \vec{0}$, atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}$; am observat că a doua proprietate este echivalentă cu comutativitatea produsului numerelor reale și de faptul că unghiul dintre \vec{a} și \vec{b} coincide cu unghiul dintre \vec{b} și \vec{a} .

2) **Te m ă**.

3) Cazul $\vec{a} = \vec{0}$ este evident. Pentru a demonstra această proprietate în ipoteza $\vec{a} \neq \vec{0}$ ne ajutăm de noțiunea de numere algebrică a unei proiecții ortogonale.

Fie \vec{e} un versor și \vec{b} un vector oarecare. Se observă că $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} = \vec{e} \cdot \vec{b}$, adică numere algebrică a proiecției ortogonale a vectorului \vec{b} pe versorul \vec{e} este produsul scalar dintre \vec{b} și \vec{e} .

În primul rând, orice $\vec{a} \neq \vec{0}$ în forma $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$. Efectuăm $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{pr}_{\vec{e}}(\vec{b} + \vec{c})$ este echivalentă cu $\vec{e} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{e} \cdot \vec{b} + \vec{e} \cdot \vec{c}$. Înmulțind cu $\|\vec{a}\|$ (ținând seama de 2) deducem $(\|\vec{a}\| \vec{e}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\|\vec{a}\| \vec{e}) \cdot \vec{b} + (\|\vec{a}\| \vec{e}) \cdot \vec{c}$, ceea ce dă 3).

4) Demonstrația este imediată. Facem însă observația că relația $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ este echivalentă cu $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, ultima a permițând calculul lungimii vectorului liber \vec{a} dacă cunoaștem produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

Deoarece și proprietățile produsului scalar conferă spațiului vectorial al vectorilor liberi din plan o structură de *spațiu euclidian*.

Căsuțe. 1) Relația $|\cos \varphi| \leq 1$ implică *inegalitatea Cauchy*

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|.$$

Astfel modulul produsului scalar a doi vectori este cel mult egal cu produsul lungimilor celor doi vectori. Inegalitatea are loc $\Leftrightarrow \cos \varphi = \pm 1$, adică $\varphi = 0$ sau $\pi \Leftrightarrow$ cei doi vectori sînt coliniari.

2) Inegalitatea lui Cauchy implică *inegalitatea triunghiului (Minkowski)*

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } \|\vec{a} + \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \\ &= \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2} \leq \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2} = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|. \end{aligned}$$

Evident avem egalitate $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ (sînt coliniari și) au același sens.

3, Fie (\vec{u}, \vec{v}) o bază în V și $\vec{a} = r_1 \vec{u} + s_1 \vec{v}, \vec{b} = r_2 \vec{u} + s_2 \vec{v}$.

Proprietățile produsului scalar implică

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (r_1 \vec{u} + s_1 \vec{v}) \cdot (r_2 \vec{u} + s_2 \vec{v}) = \dots = r_1 r_2 (\vec{u} \cdot \vec{u}) + (r_1 s_2 + r_2 s_1) (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \\ &+ s_1 s_2 (\vec{v} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$



Fig. 1.33

Cu alte cuvinte produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ va fi cunoscut dacă se dă tabelul 1. Pentru calcul este avantajos să alegem bază pentru care tabelul 1 să fie cât mai simplu posibil. Acesta este și cazul bazelor formate din versori ortogonali.

	\vec{a}	\vec{b}
\vec{a}	$\vec{a} \cdot \vec{a}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$
\vec{b}	$\vec{b} \cdot \vec{a}$	$\vec{b} \cdot \vec{b}$

TABELUL 1

	\vec{i}	\vec{j}
\vec{i}	$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$	$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
\vec{j}	$\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

TABELUL 2

Bază ortonormată. O bază din V formată din versori ortogonali se numește *bază ortonormată*. Fie (\vec{i}, \vec{j}) o bază ortonormată, adică o bază care satisface relațiile din tabelul 2. Coordonatele unui vector \vec{a} (fig. 1.33), în raport cu o asemenea bază, se numesc *coordoanate euclidiene*. Presupunând $\vec{a} = r_1 \vec{i} + s_1 \vec{j}$, se observă că $\vec{i} \cdot \vec{a} = r_1 = \vec{i} \cdot (r_1 \vec{i} + s_1 \vec{j}) = r_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + s_1 \vec{i} \cdot \vec{j} = r_1$, adică coordonatele euclidiene sînt măsurile algebrice ale proiecțiilor ortogonale pe versorii \vec{i} , respectiv \vec{j} .

Da că $\vec{a} = r_1 \vec{i} + s_1 \vec{j}$, $\vec{b} = r_2 \vec{i} + s_2 \vec{j}$, atunci se constată $\vec{a} \cdot \vec{b} = r_1 r_2 + s_1 s_2$, adică produsul scalar a doi vectori raportați la aceeași bază ortonormată este suma produselor coordonatelor corespundente. În particular, putînd $\vec{a} = \vec{b}$ găsim

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{r_1^2 + s_1^2},$$

adică lungimea unui vector este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor coordonatelor euclidiene.

Se observă că

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow r_1 r_2 + s_1 s_2 = 0,$$

adică doi vectori raportați la aceeași bază ortonormată sînt ortogonali, dacă și numai dacă suma produselor coordonatelor corespundente este nulă. Mai mult, pentru $\vec{a}, \vec{b} \in V - \{\vec{0}\}$, avem

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{r_1 r_2 + s_1 s_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2} \sqrt{r_2^2 + s_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Știind că $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 1$, să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

Soluție. Prin definiție $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$. Ținînd seama de comutativitatea față de adunare găsim $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0$, pozitivitatea și comutativitatea implică „ $\vec{a} \cdot \vec{a} + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$. Deci $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}$.

2. Să se verifice că vectorii

$$\mathbf{u} = (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{c}} - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}})\bar{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}}{\|\bar{\mathbf{a}}\|^2} \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$$

sînt ortogonali față de $\bar{\mathbf{a}}$.

Soluție Folosim $\bar{\mathbf{a}}$ ținînd seama de distributivitate și omogenitate,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{a}} \cdot [(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{c}} - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}})\bar{\mathbf{b}}] = \bar{\mathbf{a}} \cdot [(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})\bar{\mathbf{c}}] - \bar{\mathbf{a}} \cdot [(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}})\bar{\mathbf{b}}] = \\ &= (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}}) - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}})(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) = 0. \end{aligned}$$

Analog, se calculează $\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v}$

3. Să se arate că dacă $\bar{\mathbf{a}}$ și $\bar{\mathbf{b}}$ sînt ortogonali, atunci vectorii $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ și $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$ au normele egale.

Soluție (Fig. 1.34, cazul vectorilor nenuli). Trebuie să demonstrăm implicația

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0 \Rightarrow \|\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}\| = \|\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}\|.$$

Într-adevăr,

$$\|\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}\|^2 = (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \|\bar{\mathbf{a}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{b}}\|^2,$$

$$\|\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}\|^2 = (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}) = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}} - 2\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \|\bar{\mathbf{a}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{b}}\|^2.$$

4. Știind că $\|\bar{\mathbf{a}}\| = 1$, $\|\bar{\mathbf{v}}\| = \sqrt{2}$, iar unghiul φ dintre $\bar{\mathbf{a}}$ și $\bar{\mathbf{v}}$ este $\frac{\pi}{3}$, să determine r astfel încît $\bar{\mathbf{a}} = r\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\mathbf{v}}$ să fie ortogonali.

Soluție Condiția $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0$ este echivalentă cu $(r\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{v}}) \cdot (\bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\mathbf{v}}) = 0$ sau $r(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) + (r+1)\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + 2\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$. Deoarece $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \|\bar{\mathbf{a}}\| \|\bar{\mathbf{v}}\| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, găsim $-r + (2r+1)\frac{\sqrt{6}}{2} + 4 = 0$, adică $r = \frac{3\sqrt{6}-8}{2\sqrt{6}}$.

5. Se știe că vectorul $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ este perpendicular pe vectorul $\bar{\mathbf{a}} - 3\bar{\mathbf{b}}$, iar vectorul $3\bar{\mathbf{a}} - 2\bar{\mathbf{b}}$ este perpendicular pe vectorul $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$. Să se găsească $\bar{\mathbf{a}}$ și $\bar{\mathbf{b}}$.

Soluție Relația $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\bar{\mathbf{a}} - 3\bar{\mathbf{b}}) = 0$ este echivalentă cu $\|\bar{\mathbf{a}}\|^2 - 2\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} - 3\|\bar{\mathbf{b}}\|^2 = 0$, iar relația $(3\bar{\mathbf{a}} - 2\bar{\mathbf{b}}) \cdot (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}) = 0$ este echivalentă cu $2\|\bar{\mathbf{a}}\|^2 - 5\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} + 2\|\bar{\mathbf{b}}\|^2 = 0$. Eliminînd termenul care conține pe $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}$ găsim $\|\bar{\mathbf{a}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{b}}\|^2 = 0$ deci $\|\bar{\mathbf{a}}\| = \|\bar{\mathbf{b}}\| = 0$, adică $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$.

6. Utilizînd produsul scalar și definiția linear independenței, să se arate că oricare doi vectori nenuli ortogonali sînt linear independenți.

Soluție Fie $\bar{\mathbf{a}}$ și $\bar{\mathbf{b}}$ doi vectori nenuli, cu proprietatea $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0$. Relația $r\bar{\mathbf{a}} + s\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$ implică $(r\bar{\mathbf{a}} + s\bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0$, $(r\bar{\mathbf{a}} + s\bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0$, adică $r\|\bar{\mathbf{a}}\|^2 + s(\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = 0$, $r(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) + s\|\bar{\mathbf{b}}\|^2 = 0$. Acestea din urmă împreună cu ipotezele implică $r = 0$ și $s = 0$.

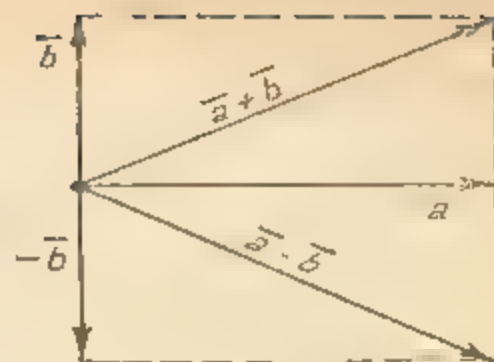


Fig. 1.34

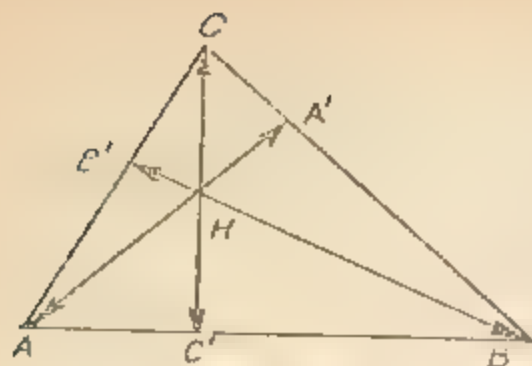


Fig. 135

7. Să se arate că înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Soluție. Fie înălțimile AA' și CC' și H punctul lor de intersecție. Unim pe B cu H și prelungim segmentul $[BH]$ până în B' (fig. 135). Deoarece $LC = HC = HH$, $AB = HB' - HA$, relațiile $AA' \perp BC$, $CC' \perp AB$ sunt echivalente cu $\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$, $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$. Aceste două egalități implică $\overrightarrow{HH} \cdot (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}) = 0$, adică $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ sau $HB' \perp CA$.

Te m ă. Comparați soluția vectorială cu cea sintetică:

8. În V se fixează o bază ortonormată (\vec{i}, \vec{j}) .

1) Să se calculeze

$$(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (2\vec{i}), (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (\pi\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}).$$

2) Să se determine unghiul vectorilor

$$\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - 2\vec{j}.$$

3) Să se arate că vectorii

$$2\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + 2\vec{j}$$

sunt liniar independenți.

Soluție. 1), 2) Se folosesc formulele stabilite la partea teoretică. Deci

$$(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (2\vec{i}) = 2, (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (\pi\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}) = 2\pi - 3\sqrt{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}, \text{ adică } \varphi = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right).$$

3) Reamintim că doi vectori nenuli raportați la aceeași bază sunt necoliniari sau liniar independenți numai dacă nu au coordonate proporționale. În cazul nos

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$$

și de aceea cei doi vectori nu sunt coliniari.

§ 7. Probleme propuse

1. 1) Să se arate că două segmente orientate \overrightarrow{AD} și \overrightarrow{CB} sunt echipolente, dacă și numai dacă segmentele orientate \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} au același mijloc.

2) Fie A, A', B, B' patru puncte în plan. Dacă notăm cu M, N două puncte din același plan, astfel încât $AM = \frac{1}{2} AA'$ și $BN = \frac{1}{2} BB'$, să se arate că $2MN = AB' + A'B$.

Indicație. 1) Mijlocul segmentului orientat \overrightarrow{AD} este un punct O de pe dreapta AD cu proprietatea $d(A, O) = d(O, D)$. Se vor cerceta separat cazurile: punctele A, B, C, D coliniare, punctele A, B, C, D necoliniare. În cazul necoliniarității, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$ este un paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$ și \overrightarrow{CB} au același mijloc.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Se notează cu O_1, O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$. Să se arate că:

1) $2O_1O_2 = \overline{AD} - \overline{BC}$,

2) dacă $4O_1O_2 = \overline{AD} - \overline{BC}$, atunci $ABCD$ este un paralelogram.

Indicație 1) $O_1O_2 = \overline{AO_1} + \overline{O_2D} - \overline{EC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$.

2) Relațiile din 1) și 2) implică $\overline{O_1O_2} = 0$.

3. Se dau vectorii $\vec{u} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{v} = 6\vec{i} - 9\vec{j}$, $\vec{w} = -2\vec{i} - 9\vec{j}$.

Să se calculeze $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$.

4. Trei vectori au suma egală cu 0, și sînt necoliniari. Notînd cu \vec{OA} , \vec{OB} și respectiv \vec{OC} reprezentanții celor trei vectori, să se arate că O este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Indicație Pe \vec{OA} și \vec{OC} construim paralelogramul $OAB'C$. Notînd cu E centrul paralelogramului $OAB'C$ găsim $\vec{OB} = -2\vec{OE}$.

5. Fi triunghiul ABC și A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1) Să se arate că pentru orice punct M din planul lui ABC avem

$$M\vec{A} + M\vec{B} + M\vec{C} = 3M\vec{A'} + 3M\vec{B'} + 3M\vec{C'} = 3M\vec{G} + 2M\vec{G'},$$

2) Să se arate că există un punct G și numai unul (centrul de greutate al triunghiului ABC) cu proprietatea

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

3) Să se demonstreze că orice punct M în planul lui satisface relația

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3M\vec{G}.$$

Indicație 2) Se ține seama de relațiile din 1).

6. Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ de centre de greutate G și G' . Să se verifice relația $3A\vec{A'} + 3B\vec{B'} + 3C\vec{C'} = 3G\vec{G'}$ și cu ajutorul acesteia să se deducă condiția necesară și suficientă ca două triunghiuri să aibă același centru de greutate.

Indicație Fie A_1 mijlocul lui $[BC]$, A'_1 mijlocul lui $[B'C']$, etc. Rezultă: $A\vec{A'} = \frac{3}{2}A\vec{A_1} + G\vec{G'} + \frac{2}{3}A'_1\vec{A'}$ și alte două relații analoge.

7. În vîrfurile unui pătrat cu latura a se află sarcini electrice pozitive egale cu $+q$. În centrul pătratului se pune o sarcină electrică negativă $-Q$. Să se calculeze raportul $\frac{Q}{q}$ astfel încît forțele care acționează asupra fiecăreia din cele patru sarcini electrice q să aibă rezultanta egală cu zero.

8. Se ține seama de legea lui Coulomb. Asupra fiecărei sarcini electrice q acționează patru forțe al căror echilibru conduce la relația $\frac{Q}{q} = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2})$.

9. Fie punctele A, B, C, D și numerele a, b, c , fixate. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ definim punctele M, N, P, Q prin

$$BM = (a + x)BA, \quad HN = (b - x)NC,$$

$$DQ = (b + x)DA, \quad DP = (c - x)DC.$$

Să se verifice că $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AQ}$ este un vector constant.

Indicație. $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AQ}$ se exprimă în funcție de a, b, c și de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

9. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat înscris în cercul de centru O și rază 1.

1) Fixând baza $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ să se găsească coordonatele vectorilor $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$.

2) Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

$$\text{R. } \overrightarrow{OC} \left(-1, \frac{1}{2 \cos 36^\circ} \right), \overrightarrow{OD} \left(-\frac{1}{2 \cos 36^\circ}, -1 \right), \overrightarrow{OE} \left(\frac{1}{2 \cos 36^\circ}, -1 \right).$$

10. Fie A, B, C trei puncte în plan, astfel încât vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} să fie liniar independenți.

1) Să se arate că relația $\overrightarrow{MB} = t_1 \overrightarrow{AC}$ definește un punct M din plan, dacă $t_1 \in \mathbb{R} + \{1\}$ iar vectorii \overrightarrow{MB} și \overrightarrow{BC} sunt liniar dependenți.

2) Se consideră punctele N și P care verifică relațiile $\overrightarrow{NC} = t_2 \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{PA} = t_3 \overrightarrow{BC}$, $t_2, t_3 \in \mathbb{R} + \{1\}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN}$ în raport cu baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3) Ce relație trebuie să verifice numerele t_1, t_2, t_3 pentru ca vectorii $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}$ să fie liniar dependenți?

R. 1) \overrightarrow{BC} este nenul și deci $\overrightarrow{MB} = t_1 \overrightarrow{BC} = t_1(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC})$. Relația $\overrightarrow{MB} = t_1 \overrightarrow{MC}$ și $B \neq C$ arată că $M \neq C$ și deci $t_1 \neq -1$.

$$2) \overrightarrow{PN} = \frac{t_2}{1-t_2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1-t_2} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PM} = \left(\frac{t_3}{1-t_3} + \frac{t_1}{1-t_1} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{t_1}{1-t_1} \overrightarrow{AC},$$

$$3) t_1 t_2 t_3 = 1.$$

11. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{w} \in V$ definiți în raport cu baza $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ prin egalitățile $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{w} = 8\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Pentru ce valoare $x \in \mathbb{R}$ vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ sunt liniar dependenți?

2) Pentru ce valori $y \in \mathbb{R}$ vectorii \overrightarrow{a} și \overrightarrow{w} sunt liniar independenți?

$$\text{R. } 1) x = -\frac{21}{2}; \quad 2) y \neq -\frac{16}{3}.$$

12. Fie (\vec{i}, \vec{j}) o bază ortonormată și vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}$.

1) Să se calculeze normele acestor vectori.

2) Care sunt versorii asociați acestor vectori?

3) Să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{d}$.

13. Fie \vec{a} și \vec{b} doi vectori ortogonali și cu normele egale. Să se arate că vectorii care formează următoarele perechi sunt ortogonali:

$$1) 2\vec{a} + \vec{b} \text{ și } \vec{a} - 2\vec{b},$$

$$2) \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \text{ și } -\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$3) -0,2\vec{a} + 1,6\vec{b} \text{ și } -1,6\vec{a} - 0,2\vec{b}.$$

14. Fie (\vec{i}, \vec{j}) o bază ortonormată a lui V și vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

1) Să se găsească vectorul \vec{v} ortogonal pe \vec{i} care satisface condiția $\vec{a} \cdot \vec{v} = 3$.

2) Să se determine $\pi_{\vec{b}}(\vec{v})$ și mărimea algebrică a acestei proiecții.

$$\text{R. } 1) \vec{v} = 3\vec{j}, \quad 2) \text{ Se determină } t \text{ și } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ astfel încât } t\vec{b} + \vec{v} = \vec{v}, \vec{b} \cdot \vec{v} = 0.$$

Rezultă $\pi_b(a) = \frac{6}{5}b$, $\text{pr}_b a = \frac{6}{\sqrt{5}}a$.

15. În triunghiul ABC , mediana corespunzătoare laturii $[AB]$ intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D . Să se arate că dacă m este măsura unghiului C al cordelor $[CD]$, este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $2c^2 = a^2 + b^2$.

Indicație. Fie O centrul cercului circumscris;

$$OG = \frac{1}{3}(OA + OB + OC), \quad GC = \frac{1}{3}(OA + OB + 2OC), \quad OG \cdot GC = 0 \Rightarrow 2 \cos 2C = \cos 2A + \cos 2B = 0; \text{ se ține seama de formula sinusurilor}$$

16. Fie V spațiul vectorial al vectorilor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ în $V = \mathbb{R}^2$ cu $\bar{a} = a + b$ un vector arbitrar din V a fel încât $n_1(\bar{a}) = \max\{|r|, |s|\}$, $n_2(\bar{a}) = \sqrt{r^2 + s^2}$, $n_3(\bar{a}) = |r| + |s|$. Să se arate că

$$n_1(a) \leq n_2(\bar{a}) \leq n_3(a) \leq 2n_1(a), \quad n_1(\bar{a}) \leq n_2(a) \leq \sqrt{2} n_1(\bar{a}),$$

$$n_1(t\bar{a}) = |t| n_1(\bar{a}), \quad n_1(a + b) \leq n_1(a) + n_1(b), \quad t \in \mathbb{R}, \quad b \in V.$$

Indicație. Primele relații se transcriu:

$$\max\{|r|, |s|\} \leq \sqrt{r^2 + s^2} \leq |r| + |s| \leq 2 \max\{|r|, |s|\}.$$

Capitolul II

DREAPTA

§ 1. Reper cartezian

Geometria analitică în plan este o metodă care constă în studiul figurilor geometrice plane cu ajutorul numerelor reale sau a perechilor ordonate de numere reale. Prin această raționamentelor sintetice li se substituie raționamente algebrice. Calculul vectorial poate servi ca instrument de bază în această convertire.

Fie planul p și V spațiul vectorial real al vectorilor liberi din acest plan. După cum s-a văzut în Capitolul I, § 1, fixarea unui punct O în plan permite stabilirea unei bijecții naturale între p și V : fiecărui punct $M \in p$ i se asociază vectorul de poziție, $\vec{r} = \vec{OM}$, al punctului M față de originea O . Or, din $O = O$ corespunde vectorul de poziție $\vec{0} \in V$, iar simetricului lui M față de O i se corespunde vectorul de poziție $-\vec{r}$.

Având în vedere unele avantaje în raționamente și calcule se preferă determinarea punctelor din p cu ajutorul vectorilor de poziție în raport cu originea O — pentru vectorii liberi se preferă reprezentarea lor în raport cu o bază ortonormată din V .

Definiție. Fie O un punct din p și (\vec{i}, \vec{j}) o bază ortonormată a lui V . Ansamblul $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ se numește reper cartezian în plan (fig. 11.1).

Punctul O se numește *originea reperului*, iar (\vec{i}, \vec{j}) se numește *baza reperului*. Coordonatele euclidiene (x, y) ale vectorului de poziție $\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

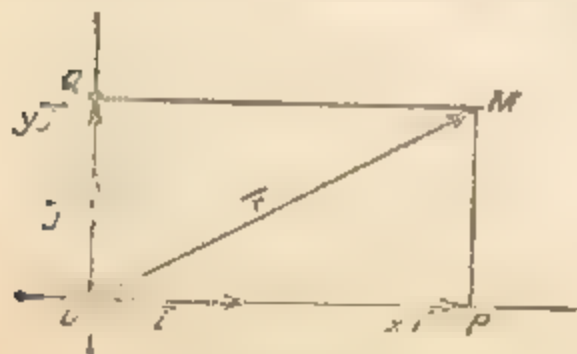


Fig. 11.1

(fig. 11.1) poartă numele de *coordonațe carteziene* ale punctului M față de reperul ortonormat $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$. Numărul real $x = \vec{i} \cdot \vec{r} = \text{pr}_{\vec{i}} \vec{r}$ se numește *abscisă*, iar numărul real $y = \vec{j} \cdot \vec{r} = \text{pr}_{\vec{j}} \vec{r}$ se numește *ordonată*. Fixarea unui reper cartezian în plan determină o bijecție între p și \mathbb{R}^2 : fiecărui punct $M \in p$ i se atașează coordonatele carteziene. Această bijecție se numește *sistem de coordo-*

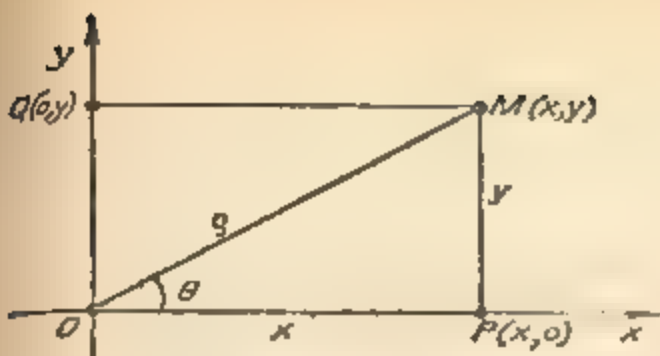


Fig. II.2

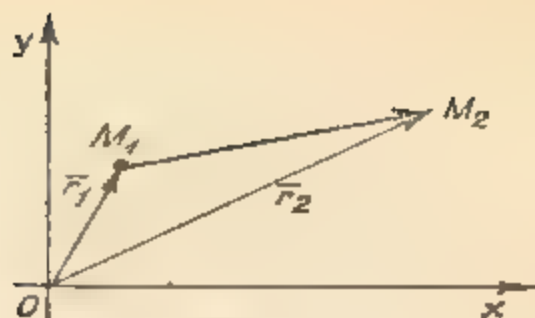


Fig. II.3

hate cartezian definit de reperul $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ pe mulțimea punctelor din plan și se notează prin scrierea alăturată a punctului și a coordonatelor sale, adică $M(x, y)$.

Axa determinată de punctul O și de versorul \vec{i} se numește *axa Ox* sau *axa absciselor*, iar axa determinată de punctul O și de versorul \vec{j} se numește *axa Oy* sau *axa ordonatelor*. Toate punctele de pe axa Ox sunt caracterizate prin faptul că au ordonata nulă; toate punctele de pe axa Oy sunt caracterizate prin faptul că au abscisa nulă.

Deseori reperul cartezian este indicat prin xOy , prin aceasta înțelegându-se că s-a fixat originea O și axele ortogonale Ox și Oy (fig. II.2). În acest caz versorii ortogonali \vec{i} și \vec{j} rezultă din context.

Axele împart planul în patru regiuni

I : $x > 0, y > 0$; II : $x < 0, y > 0$; III : $x < 0, y < 0$; IV : $x > 0, y < 0$, numite *cadrane deschise*. Mulțimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ se numește *semiplanul superior*, iar mulțimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y < 0\}$ se numește *semiplanul inferior*.

Fie $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper cartezian în plan și $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ două puncte date. Vectorul liber M_1M_2 reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$ este diferența dintre vectorul de poziție al extremității M_2 și vectorul de poziție al originii M_1 (fig. II.3). Deci

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

De aici obținem distanța dintre punctele M_1 și M_2 , anume

$$d(M_1, M_2) = \| \overrightarrow{M_1M_2} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observație (fig. II.2). Notăm lungimea $\|\vec{r}\|$ cu ρ și unghiul dintre \vec{i} și \vec{r} cu θ . Unghiul θ se consideră pe intervalul $[0, 2\pi)$. Rezultă $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, adică fiecărui punct $M \neq O$ din plan i se poate asocia o singură pereche ordonată de numere reale (ρ, θ) , $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Numerele ρ și θ se numesc *coordonațiile polare* ale punctului M . Se scrie $M(\rho, \theta)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ se dau punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -3)$, $C(8, 0)$, $D(0, 4)$.

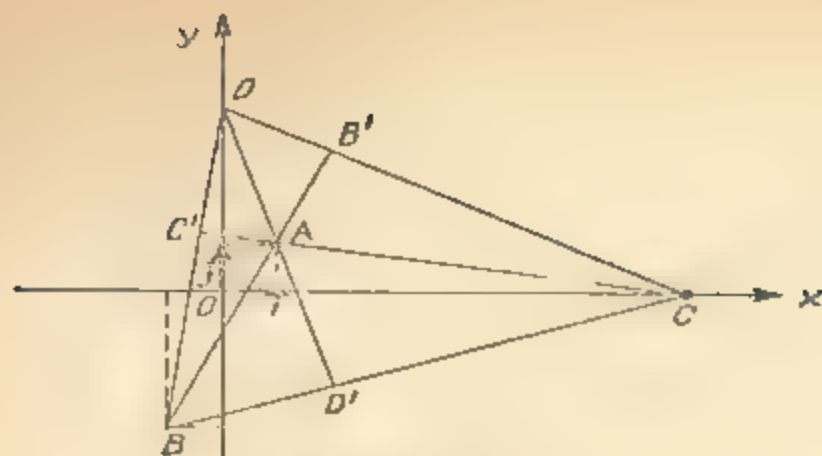


Fig. 11.4



Fig. 11.5

- 1) Să se scrie coordonatele vectorilor \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DB} și \overrightarrow{BC} .
- 2) Să se calculeze lungimile vectorilor \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} și $\angle ABC$.
- 3) Să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ și să se arate că fiecare dintre punctele A , B , C , D este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei puncte.

Soluție (fig. 11.4) 1) Deoarece \vec{i}, \vec{j} este o bază ortonormală, rezultă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2\vec{i} - 4\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = -3\vec{i} - 5\vec{j}$. Deci \overrightarrow{AB} are coordonatele $(-3, -5)$.

Analog $\overrightarrow{AC}(7, -1)$, $\overrightarrow{CD}(-8, 4)$, $\overrightarrow{DB}(-1, -7)$, $\overrightarrow{BC}(9, 3)$.

2) Ținând seama că (\vec{i}, \vec{j}) este o bază ortonormală găsim $\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} = 2\sqrt{17}$. Analog $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$. Cu acestea găsim $\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(-3\vec{i} - 5\vec{j}) \cdot (9\vec{i} + 3\vec{j})}{\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{-27 - 15}{\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{-42}{3\sqrt{340}} = \frac{-14}{\sqrt{340}} = \frac{-14}{\sqrt{4 \cdot 85}} = \frac{-14}{2\sqrt{85}} = \frac{-7}{\sqrt{85}}$.

adică $\angle ABC = \arccos \frac{-7}{\sqrt{85}}$.

3) Deoarece (\vec{i}, \vec{j}) este o bază ortonormală calculele sînt următoarele

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-3\vec{i} - 5\vec{j}) \cdot (-8\vec{i} + 4\vec{j}) = (-3)(-8) + (-5)(4) = 24 - 20 = 4,$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (7\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} - 7\vec{j}) = 7(-1) + (-1)(-7) = -7 + 7 = 0.$$

Rezultă $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, adică fiecare dintre punctele A , B , C , D este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei puncte.

2. În plan fixăm reperul cartezian xOy . Să se figureze punctele corespunzătoare elementelor mulțimii $\{0, 3, 6\} \times \{-2, 0, 3, 5\}$. Să se găsească cea mai mică și cea mai mare distanță dintre elementele acestor mulțimi. Există în această mulțime trei puncte care să determine un triunghi isoscel? Dar echilateral?

Soluție Elementele preamului corier în sînt date în tabelul 1. Dacă notăm $A(0, -2)$, $O(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(0, 5)$, $D(3, -2)$, $E(3, 0)$, $F(3, 3)$, $G(3, 5)$, $H(6, -2)$, $I(6, 0)$, $L(6, 3)$, $M(6, 5)$ obținem figura 11. 5.

TABELUL 1

x	-2	0	3	5
0	(0, -2)	(0, 0)	(0, 3)	(0, 5)
3	(3, -2)	(3, 0)	(3, 3)	(3, 5)
6	(6, -2)	(6, 0)	(6, 3)	(6, 5)

Se observă că $d(O, A) = 2$, iar figura II.5 pune în evidență că acest număr reprezintă cea mai mică distanță. Analog, $d(A, M) = d(H, C) = \sqrt{85}$ este cea mai mare distanță.

Deoarece $d(B, O) = d(B, P)$, $OB \perp BP$ triunghiul OBP este dreptunghiuc isoscel. Nu există nici un triunghi echilateral întrucât lungimile isoscele se pot forma sint fie dreptunghiace, fie au lungimea jumătății bazei și lungimea înălțimi numere întregi.

§ 2. Dreapta determinată de un punct și de un vector director

Presupunem că planul a fost raportat la un reper cartezian. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct, $\vec{a}(u, v)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă d care are direcția lui \vec{a} și care trece prin M_0 (fig. II.6).

Teoremă. Fie \vec{r}_0 vectorul de poziție al punctului M_0 și \vec{r} vectorul de poziție al unui punct oarecare $M(x, y)$ din plan. Punctul M aparține dreptei d determinată de M_0 și de $\vec{a} \neq 0$ dacă și numai dacă

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație (fig. II.6). Punctul M aparține dreptei d dacă și numai dacă vectorii \vec{M}_0M și \vec{a} sînt coliniari. Deoarece \vec{a} este nenul, aceasta este echivalent cu faptul că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încît $\vec{M}_0M = t\vec{a}$. Ținînd seama că $\vec{M}_0M = \vec{r} - \vec{r}_0$ rezultă relația din enunț.

Ecuația $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ se numește *ecuația vectorială a dreptei d* , iar t se numește *parametru*. Deoarece $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, $\vec{a} = u\vec{i} + v\vec{j}$, ecuația vectorială este echivalentă cu două relații scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

care se numesc *ecuațiile parametrice ale dreptei d* .

Dacă

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{aligned} x &= x_0 + ut, \\ y &= y_0 + vt, \end{aligned} t \in \mathbb{R}\}$$

sau mai scurt

$$d : x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}.$$

Vectorul nenul $\vec{a}(u, v)$ care dă direcția dreptei d se numește *vector director*. Coordo-

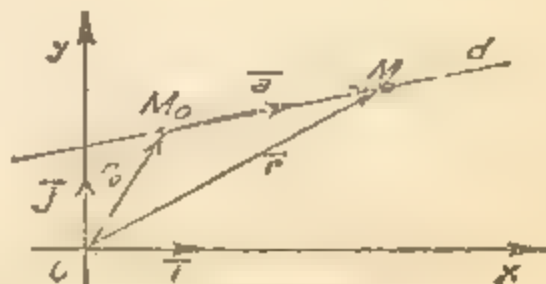


Fig. II.6

natele sale u și v se numesc *parametri directori ai dreptei d* . Evident orice vector $t\vec{a}$, $t \neq 0$, joacă același rol cu \vec{a} . În particular direcția lui \vec{d} poate fi dată și prin versorul director $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$.

Exemplu. Punctul $M_0(1, -1)$ și vectorul $\vec{a}(-2, 1)$ determină dreapta d de ecuație vectorială $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} - \vec{j} + t(-2\vec{i} + \vec{j})$, $t \in \mathbb{R}$. Această ecuație vectorială este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 - 2t$, $y = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$ sau cu ecuația carteziană $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1}$. Versorul director al lui d este $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{j})$.

Dacă $uv \neq 0$, atunci ecuațiile parametrice sînt echivalente cu ecuația carteziană

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}.$$

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă $uv = 0$ (deoarece $\vec{a}(u, v)$ este nenul, cel puțin unul dintre numerele u și v se poate anula). În acest caz se face convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Dacă $u = 0$, atunci găsim $x = x_0$ și deci dreapta este paralelă cu Oy (dreaptă verticală). Dacă $v = 0$, atunci $y = y_0$, și dreapta este paralelă cu Ox (dreaptă orizontală, forma II.7). În particular: $Oy : x = 0$, $Ox : y = 0$.

Dacă $u \neq 0$, atunci ecuația carteziană a dreptei d (dreaptă oblică) se poate scrie în forma

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Numărul $m = \frac{v}{u}$, $u \neq 0$, se numește *panta sau coeficientul unghiular* al dreptei d și reprezintă tangenta unghiului $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, determinat de versorul \vec{i} și vectorul director $\frac{1}{u} \vec{a}$ (fig. II.8).

Sensul adjectivelor „vertical“, „orizontal“ și „oblic“ se raportează la reperul cartezian xOy .

Exemplu. Punctul $M_0(1, -1)$ și panta $m = -\frac{1}{2}$ determină dreapta oblică de ecuație $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$. Această dreaptă este aceeași cu cea din exemplul precedent. De ce?

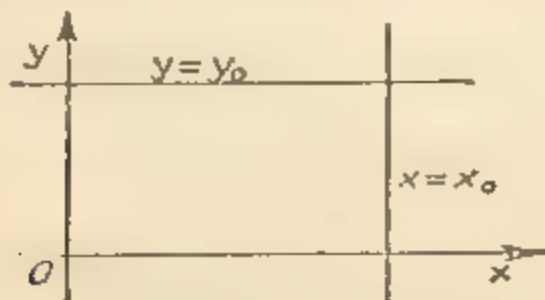


Fig. II.7

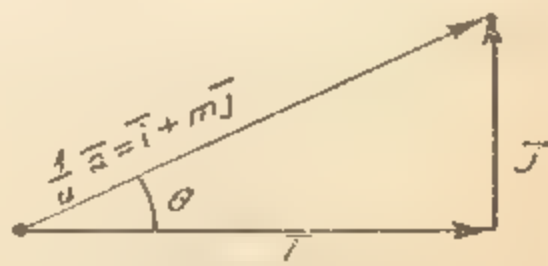


Fig. II.8

1. Să se scrie diversele ecuații ale dreptei d determinată de punctul $M_0(-1, 2)$ și vectorul director $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Soluție Ecuația vectorială a dreptei d este $\vec{r} = -\vec{i} + 2\vec{j} + t(2\vec{i} + \vec{j})$, $t \in \mathbb{R}$. Punând $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ rezultă ecuațiile parametrice $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Eliminând parametrul t găsim ecuația carteziană sub formă de rapoarte $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1}$. Aceasta se mai scrie $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$, punându-se în evidență panta $m = \frac{1}{2}$.

2. Să se scrie diversele ecuații ale dreptei d care trece prin punctul $A(2, \sqrt{3})$ și face cu x un unghi de 60° .

Soluție Panta dreptei d este $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Rezultă ecuații carteziană $y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 2)$. Aceasta este echivalentă cu $\frac{y - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x - 2}{1}$. Deoarece partea stângă depinde numai de y , iar partea dreaptă depinde numai de x rezultă că valoarea comună a rapoartelor este un număr real t , independent de x și de y . Egalând cu t și explicitând pe x și y găsim ecuațiile parametrice $x = 2 + t$, $y = \sqrt{3}(1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Rezultă ecuația vectorială $x\vec{i} + y\vec{j} = 2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + t(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Ecuațiile mișcării uniforme a unui punct material $M(x, y)$ sînt $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, unde $t \in [0, \infty)$ reprezintă timpul.

1) Care este viteza lui M ?

2) Să se găsească distanța parcursă de la momentul $t_1 = 0$ la momentul $t_2 = 10$.

Soluție Se observă că ecuațiile date reprezintă o semidreaptă din dreapta de vector director $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$. Acesta este chiar vectorul viteză.

1) Găsim viteza $\|\vec{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2) Pentru $t_1 = 0$ obținem punctul $M_1(5, -3)$, iar pentru $t_2 = 10$ obținem punctul $M_2(-15, 17)$. Distanța cerută este $d(M_1, M_2) = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = \|\vec{v}\|(t_2 - t_1)$.

§ 3. Dreapta determinată de două puncte distincte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ determină o (singură) dreaptă d . Pentru a scrie ecuația carteziană a acestei drepte vom considera că ea este determinată de punctul M_1 și de vectorul director $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ (fig. II.9). Astfel

$$\blacksquare : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

cu convenția făcută în §2 referitoare la anularea numitorilor.

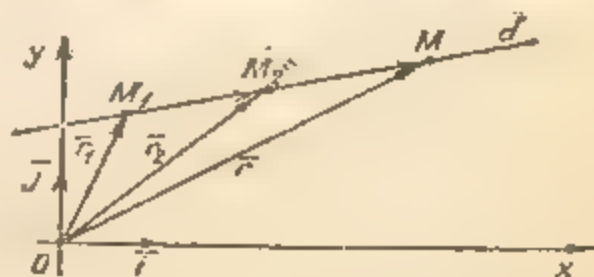


Fig. II.9

Utilizând determinanții ecuația precedentă se mai scrie în formele echivalente

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oricare dintre aceste ecuații în \mathbb{R}^2 conduce la condiția ca trei puncte date $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, să fie coliniare:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Următoarele afirmații sînt imediate și stabilesc legătura între modalitățile de determinare a dreptei prin două puncte și printr-un punct și o direcție. Dacă $x_2 - x_1 \neq 0$, atunci dreapta M_1M_2 are coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \theta, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Punînd

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

rezultă că ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ sînt

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De aici se observă imediat că coeficientul $[M_1, M_2]$ este caracterizat prin

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

sau altfel scris

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Pentru $t = 0$ obținem punctul M_1 , pentru $t = 1$ găsim punctul M_2 , iar pentru $t = \frac{1}{2}$ se găsește mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, adică punctul de coordonate

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Evident punctele corespunzătoare lui $t \in (0, 1)$ sînt puncte interioare pentru segmentul $[M_1M_2]$.

Aplicați 1) Împărțirea unui segment orientat nenul într-un raport dat.

Se spune că punctul M împarte segmentul orientat nenul $\overrightarrow{M_1M_2}$ în raportul $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ dacă satisface condiția $M_1M = kMM_2$. Deoarece $M_1M = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$,

$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, condiția de definiție este echivalentă cu $x - x_1 = k(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = k(y_2 - y_1)$ și deci coordonatele punctului M sînt

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \quad k \neq -1, \quad k = \text{fixat}.$$

Pentru $k = 0$, obținem punctul M_1 , iar pentru $k = 1$ obținem mijlocul segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$. Pentru $k > 0$, punctul M este interior segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$, iar pentru $k < 0$, punctul M este exterior segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Observație Ecuațiile $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$, $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ reprezintă dreapta M_1M_2 ca și $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Legătura dintre parametrul t și parametrul k este $t = \frac{k}{1 + k}$.

2) *Centru de greutate* Fie punctele distincte M_1, M_2, \dots, M_n avînd vectorii de poziție $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \dots, \overrightarrow{OM_n}$ și numerele reale m_1, m_2, \dots, m_n cu proprietatea $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$. Punctul G definit prin

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

se numește *centru de greutate al sistemului de puncte* (M_1, M_2, \dots, M_n) *relativ la sistemul de ponderi* (m_1, m_2, \dots, m_n) .

Dacă $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ și $G(x, y)$, atunci

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Dacă $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, atunci sistemul de puncte se zice *omogen*. În acest caz centrul de greutate are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

În particular, pentru $n = 2$ obținem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $n = 3$ obținem coordonatele centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctele $A\left(-\frac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\frac{2}{5}, 4\right)$, $C(1, 5)$, $D\left(-\frac{7}{5}, 1\right)$. Să se găsească ecuațiile dreptelor distincte determinate de aceste puncte.

Soluție. Dreapta AB are ecuația $\frac{x + \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{y - 2}{4 - 2}$, adică $\frac{x + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{y - 2}{2}$.

Deoarece $\frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{5 - 2}{2}$, punctul C se află pe dreapta AB , adică punctele A, B, C sînt coliniare.

analog,

$$\begin{array}{r} 7 + 4 \\ 5 \quad 5 \\ \hline 6 \quad 2 \\ 5 \end{array}$$

arată că punctele A, B, D sînt coliniare.

2. Se dau punctele $A(-1, 0)$, $B(1, -2)$. Să se determine:

1) coordonatele simetricului lui A față de B ,

2) coordonatele punctului M care împarte segmentul \overline{AB} în raportul π .

Soluție. 1) Fie (x, y) coordonatele simetricului lui A față de B . Egalăm, de $-\frac{1+x}{2} = 1$,

$\frac{0+y}{2} = -2$ conduc la $x = 3$, $y = -4$.

2) Preferăm înlocuirea directă în formule. Rezultă

$$x = \frac{-1 + \pi}{1 + \pi} \quad y = \frac{2\pi}{1 + \pi}.$$

3. Să se verifice că mijlocul segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater de vîrfuri $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, este centrul de greutate al sistemului omogen de puncte (M_1, M_2, M_3, M_4) .

Soluție (fig. II.10) Coordonatele mijlocului A al segmentului $[M_1M_3]$ sînt $x_A = \frac{x_1 + x_3}{2}$, $y_A = \frac{y_1 + y_3}{2}$, iar coordonatele mijlocului B al segmentului $[M_2M_4]$ sînt $x_B = \frac{x_2 + x_4}{2}$, $y_B = \frac{y_2 + y_4}{2}$. Mijlocul G al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_G = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, $y_G = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$, adică G este centrul de greutate specificat în problemă.

§ 4. Ecuația carteziană generală a unei drepte

Fie un punct $M_0(x_0, y_0)$ avînd vectorul de poziție $\vec{r}_0(x_0, y_0)$ și fie $\vec{n}(a, b)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă d ce trece prin M_0 și este perpendiculară pe \vec{n} (fig. II. 11).

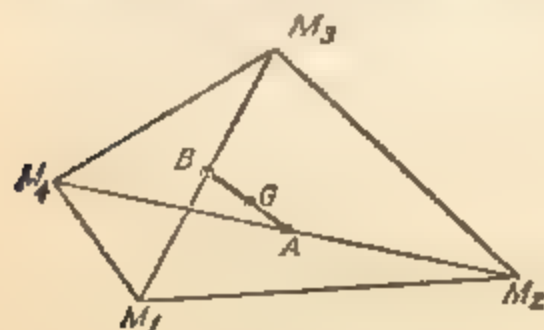


Fig. II.10

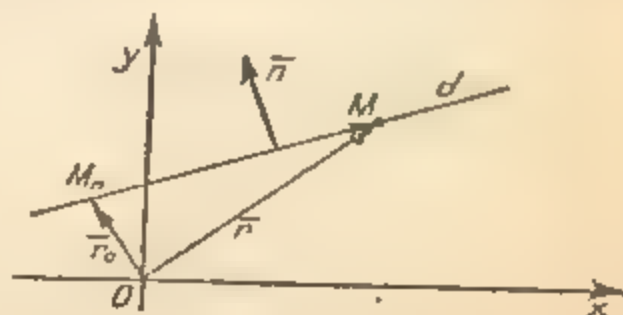


Fig. II.11

Teoremă. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar și $\vec{r}(x, y)$ vectorul său de poziție. Punctul M aparține dreptei d , determinată de M_0 și de $\vec{n} \neq \vec{0}$, dacă și numai dacă

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Demonstrație. Punctul M aparține lui d dacă și numai dacă vectorii \vec{n} și $M_0M = \vec{r} - \vec{r}_0$ sînt ortogonali. Pe de altă parte ortogonalitatea este echivalentă cu anularea produsului scalar.

Deoarece $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ecuația $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ în V este echivalentă cu ecuația

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

în \mathbb{R}^2 , aceasta din urmă numindu-se *ecuația carteziană a unei drepte ce trece prin M_0 și este perpendiculară pe vectorul nenul \vec{n}* . Vectorul nenul \vec{n} se numește *vectorul normal* al dreptei d . Precizăm că orice vector $t\vec{n}$, $t \neq 0$, joacă același rol cu \vec{n} .

Teoremă. Fie $\vec{a}(u, v)$ și $\vec{n}(a, b)$ doi vectori nenuli. Ecuațiile

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ în } V, \quad \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ în } \mathbb{R}^2;$$

$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}$ în \mathbb{R}^2 ; $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ în V ; $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ în \mathbb{R}^2 sînt echivalente cu ecuația

$$ax + by + c = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstrație. Raționamentul direct îl lăsăm drept temă.

Reciproc, este suficient să arătăm că ecuația $ax + by + c = 0$ reprezintă o dreaptă. Într-adevăr, dacă (x_0, y_0) este o soluție a acestei ecuații, atunci găsim $c = -ax_0 - by_0$ și ecuația se scrie în forma echivalentă

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

care reprezintă o dreaptă ce trece prin $M_0(x_0, y_0)$ și este perpendiculară pe $\vec{n}(a, b)$.

Ecuația $ax + by + c = 0$ în \mathbb{R}^2 , pentru care $a^2 + b^2 \neq 0$, se numește *ecuația carteziană generală a unei drepte*. Deoarece $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este un polinom de gradul întâi în x și y , uneori se spune că dreptele sînt *curbe algebrice de ordinul unu*.

Deci

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

sau mai scurt

$$d: ax + by + c = 0.$$

Vectorul normal al unei drepte date prin ecuația carteziană generală este $\vec{n}(a, b)$, iar vectorul director al aceleiași drepte este $(b, -a)$. În cazul $b \neq 0$,

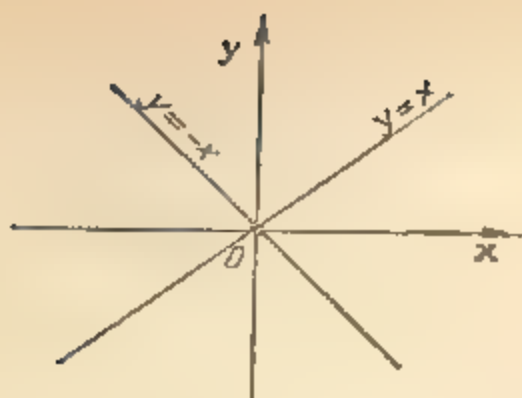


Fig. 11.12



Fig. 11.13

coeficientul unghiular este $m = \frac{a}{b}$ și ecuația dreptei corespunzătoare se poate scrie în *forma carteziană explicită*

$$y = mx + n.$$

Ecuația generală a unei drepte ce trece prin origine este

$$ax + by = 0.$$

Dacă $b \neq 0$, atunci putem scrie $y = mx$, $m = \frac{a}{b}$. În particular, pentru $m = 1$ obținem $y = x$ care este ecuația primei bisectoare a unghiului axelor de coordonate, iar pentru $m = -1$ obținem $y = -x$ care este ecuația celei de a doua bisectoare a unghiului axelor de coordonate (fig. 11.12).

Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$. Dreapta care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0) \in d$ și are vectorul director $\vec{n}(a, b)$ se numește *normala* lui d în punctul M_0 (fig. 11.13).

Comentarii. 1) Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se află pe dreapta d dacă și numai dacă $ax_0 + by_0 + c = 0$.

2) Considerăm dreapta $d: 2x + 3y + 1 = 0$. Punind $x = 1$ găsim $y = -1$, adică d trece prin punctul de coordonate $(1, -1)$. Analog constatăm că d conține punctul $(-5, 3)$. Rezultă că ecuația lui d este echivalentă cu $x - \frac{1}{3} = \frac{y + 1}{2}$. De aici se obțin ecuațiile parametrice $x = 1 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Pentru fiecare $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ dreptele de ecuații $ax + by + c = 0$ și $t(ax + by + c) = 0$ sunt coincidente. Într-adevar, prima are vectorul normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, iar a doua are vectorul normal $t\vec{n}$, $t \neq 0$. De asemenea un punct (x_0, y_0) se află pe prima dacă și numai dacă se află pe a doua, condiția comună fiind $ax_0 + by_0 + c = 0$. În concluzie ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă au coeficienții corespunzători proporționali.

Pentru $t = 0$ ecuația $t(ax + by + c) = 0$ reprezintă planul p .

4) Fie dreapta $d : ax + by + c = 0$. Pentru trasarea lui d în raport cu reperul cartezian este necesar să determinăm fie două puncte distincte pe d , fie un punct și vectorul normal, fie un punct și vectorul director, fie un punct și panta.

PROBLEME REZOLVATE

1. Ștind că $M_0(3, 4)$ este piciorul perpendicului coborâtă din origine pe dreapta d , să se scrie ecuația dreptei d . Apoi să se determine un vector director al lui d și panta lui d .

Soluție. Dreapta d este determinată de punctul $M_0(3, 4)$ și vectorul normal $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. De aceea ecuația carteziană implicită a lui d este $3(x - 3) + 4(y - 4) = 0$ adică $3x + 4y - 25 = 0$.

Un vector director al lui d este $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, iar acestuia i se asociază versorul $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{5} (-4\vec{i} + 3\vec{j})$.

Explicitând $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ găsim panta $m = -\frac{3}{4}$.

2. Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei d' ce trece prin punctul $M_0(1, 2)$ și este perpendiculară pe dreapta $d : 3x - 2y + 2 = 0$. Să se găsească proiecția lui M_0 pe d și simetricul lui M_0 față de d .

Soluție. Vectorul normal al lui d este $\vec{n} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Acesta trebuie să fie vectorul director al lui d' . Deci $d' : x = 1 + 3t, y = 2 - 2t, t \in \mathbb{R}$.

Proiecția lui M_0 pe d este dată de $d' \cap d$, adică este caracterizată prin sistemul

$$3x - 2y + 2 = 0, \quad x = 1 + 3t, \quad y = 2 - 2t.$$

Rezultă $13t + 1 = 0$, adică $t = -\frac{1}{13}$, și deci $\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$ sînt coordonatele punctului căutat. Dacă (a, b) sînt coordonatele simetricului lui M_0 față de d , atunci

$$\frac{1+a}{2} = \frac{10}{13}, \quad \frac{1+b}{2} = \frac{24}{13}.$$

Deci $a = \frac{7}{13}$, $b = \frac{35}{13}$.

3. Să se traseze graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 4|$. Apoi să se determine numărul soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} y = |x - 4|, & x \in [-1, 6] \\ y = t, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

în funcție de valorile lui t .

Soluție. Deoarece

$$f(x) = |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{pentru } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{pentru } x < 4 \end{cases}$$

graficul lui f este reuniunea semidreptelor

$$y = x - 4, \quad x \geq 4; \quad y = -x + 4, \quad x < 4$$

(fig. II.14).

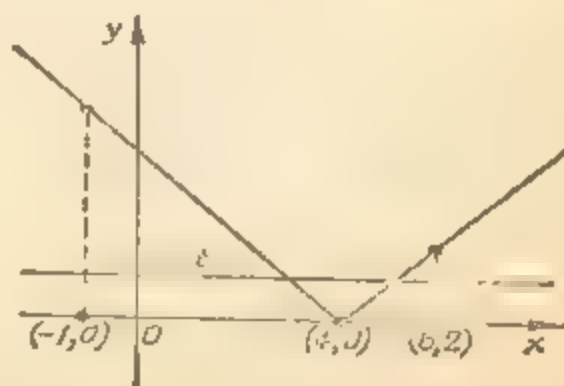


Fig. II.14

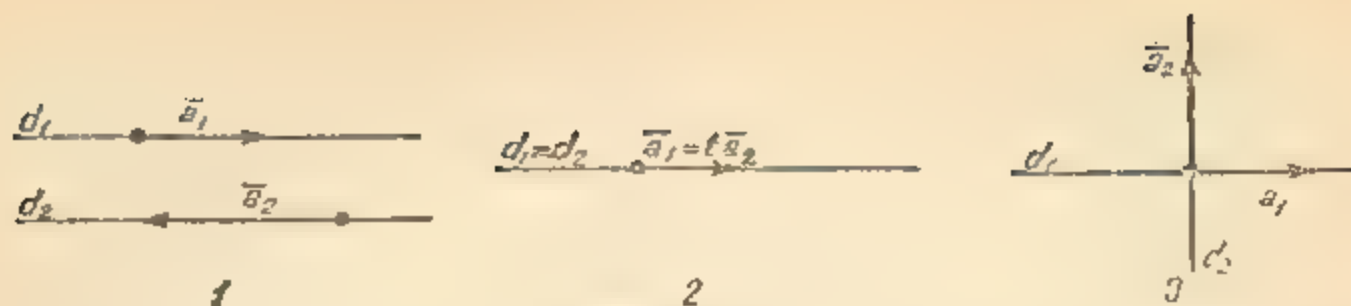


Fig. 11.15

Urmărind figura 11.14 deducem: pentru $t \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ sistemul nu admite soluție, pentru $t = 0$ se obține soluția $(4, 0)$, pentru $t \in (0, 2]$ sistemul admite două soluții, pentru $t \in (2, 5]$ sistemul admite o soluție.

§ 5. Reuniunea și intersecția a două drepte

Mai întâi ne vom referi la pozițiile relative a două drepte din plan.

Fie d_1 și d_2 două drepte care au respectiv vectorii directori \vec{a}_1 și \vec{a}_2 . Dreptele d_1 și d_2 sînt (1) *paralele* dacă și numai dacă n-au nici un punct comun ($\Rightarrow \vec{a}_1$ este colinar cu \vec{a}_2 ; figura 11.15.1), (2) *egale* dacă și numai dacă au un punct comun, iar \vec{a}_1 este colinar cu \vec{a}_2 (fig. 11.15.2), (3) *secante* dacă și numai dacă \vec{a}_1, \vec{a}_2 sînt necoliniari; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă și numai dacă $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, adică $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ (fig. 11.15.3).

În particular fie două drepte de coeficienți unghiulari m_1 și m_2 . Condiția de paralelism este $m_1 = m_2$, iar condiția de perpendicularitate este $m_1 m_2 = -1$.

Fie $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Dreptele d_1 și d_2 sînt (1) *paralele* dacă și numai dacă vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2)$ sînt colinari (fig. 11.16.1), adică $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2$, sau $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$, și $c_1 \neq tc_2$, (2) *egale* dacă și numai dacă $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$ și $c_1 = tc_2$ (fig. 11.16.2), (3) *secante* dacă și numai dacă \vec{n}_1, \vec{n}_2 sînt necoliniari; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă și numai dacă $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, adică $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (fig. 11.16.3).

Teoremă. Dacă $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci

$$d_1 \cup d_2: (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

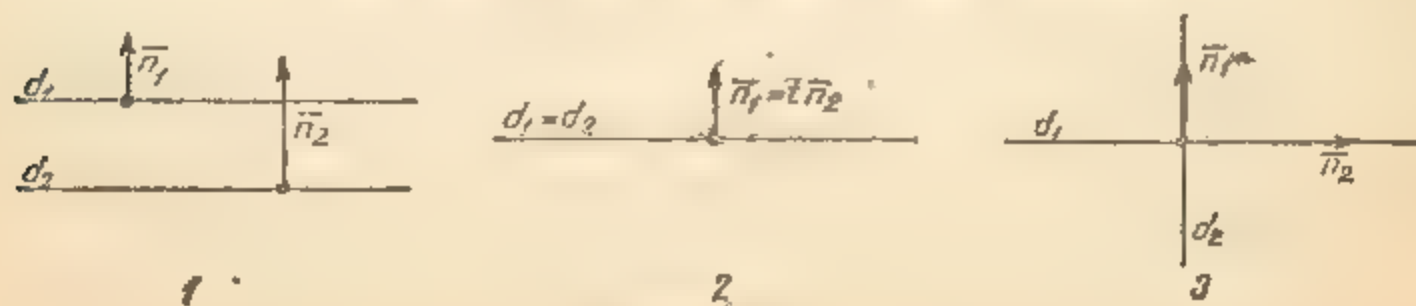


Fig. 11.16

Demonstrație. Fie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0\}$. Trebuie să arătăm că $d_1 \cup d_2 = \Gamma$, adică $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ și $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

Incluziunea $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ decurge din următorul șir de implicații: $(x_0, y_0) \in d_1 \cup d_2 \Rightarrow$ sau $(x_0, y_0) \in d_1$ sau $(x_0, y_0) \in d_2$ sau $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ sau $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \Rightarrow (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \Gamma$.

Invers: dacă $(x_0, y_0) \in \Gamma$, atunci $(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0$ și deci cel puțin un factor este zero, sa zicem $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$; rezultă $(x_0, y_0) \in d_1 \subset d_1 \cup d_2$ și deci $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

Teoremă. Dacă $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci $d_1 \cap d_2: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Mai mult,

$$1) d_1 \cap d_2 = \{M_0\} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

$$2) d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0, c_2b_1 - c_1b_2 = 0,$$

$$3) d_1 \cap d_2 = \emptyset \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0, c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0.$$

Demonstrație. Dovădăm numai relația 1), restul rezultând drept urmă.

Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, atunci sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

are soluția unică

$$x_0 = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

și deci $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$. Reciproc ipoteza $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică falsitatea relațiilor $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și $c_2b_1 - c_1b_2 = 0$, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și $c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0$ deoarece $\{M_0\}$ nu este o dreaptă (de cel) și nici mulțimea vidă. Deci $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră mulțimea de puncte $M(x, y)$ ale căror coordonate verifică ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$. Să se arate că această mulțime este reuniunea a două drepte perpendiculare, care trec prin origine.

Soluție. Fie $\Gamma: 12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în \mathbb{R}^2 este echivalentă cu ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în \mathbb{R} , cu parametrul $y \in \mathbb{R}$.

Rezultă $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0 \Leftrightarrow 12 \left(x + \frac{4y}{3} \right) \left(x + \frac{3y}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow (3x - 4y)(4x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ sau $4x + 3y = 0$. Deci $\Gamma = d_1 \cup d_2$ unde $d_1: 3x - 4y = 0$ și $d_2: 4x + 3y = 0$. Deoarece $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$, condiția de perpendicularitate $m_1m_2 = -1$ se verifică imediat.

Comentarii

1) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, cu $abc \neq 0$ și $b^2 - 4ac \geq 0$, reprezintă două drepte în plan care trec prin origine și diferite de axele Ox, Oy .

2) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, cu $abc \neq 0$ și $b^2 - 4ac < 0$, reprezintă un punct în plan și anume originea $O(0, 0)$.

3) O ecuație de forma $ax^2 + bxy = 0$ cu $ab \neq 0$, reprezintă două drepte: axa Oy de ecuație $x = 0$ și dreapta de ecuație $ax + by = 0$.

4) O ecuație de forma $bxy + cy^2 = 0$ cu $bc \neq 0$ reprezintă două drepte: axa Ox de ecuație $y = 0$ și dreapta de ecuație $bx + cy = 0$.

2. Să se găsească coordonatele punctului de intersecție al dreptelor:

$$d : (a + 1)x + ay = a,$$

$$d' : (a + 6)x + 2(a + 2)y = 2a + 1, \quad a \in \mathbb{R},$$

utilizând metoda matriceală.

Soluție. Considerând matricele

$$A = \begin{bmatrix} a + 1 & a \\ a + 6 & 2(a + 2) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 2a + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{sistemul linear } \begin{cases} (a + 1)x + ay = a \\ (a + 6)x + 2(a + 2)y = 2a + 1 \end{cases}$$

se scrie astfel $AX = B$. Deoarece

$$\det A = \begin{vmatrix} a + 1 & a \\ a + 6 & 2(a + 2) \end{vmatrix} = a^2 + 4 \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

matricea A admite inversă și

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2(a + 2) & -a \\ -(a + 6) & a + 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (I^{-1}, I)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$, adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + 4} \begin{bmatrix} 2(a + 2) & -a \\ -(a + 6) & a + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 2a + 1 \end{bmatrix}.$$

Effectuând calculele obținem

$$x = \frac{1}{a^2 + 4} \cdot [2(a + 2)a - a(2a + 1)] = \frac{3a}{a^2 + 4},$$

$$y = \frac{1}{a^2 + 4} [-(a + 6)a + (a + 1)(2a + 1)] = \frac{a^2 - 3a + 1}{a^2 + 4}.$$

3. Fie A și B , puncte în care dreapta de ecuație $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axele de coordonate.

1) Să se scrie ecuația dreptei d_1 ce trece prin A și este paralelă cu prima bisectoare a axelor.

2) Să se scrie ecuația dreptei d_2 care trece prin B și este perpendiculară pe d_1 .

3) Să se determine a astfel încât punctul de intersecție dintre d_1 și d_2 să fie pe dreapta de ecuație $x + 5y = 1$.

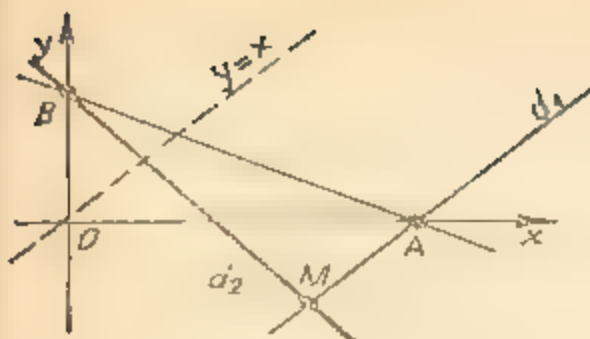


Fig. II.17

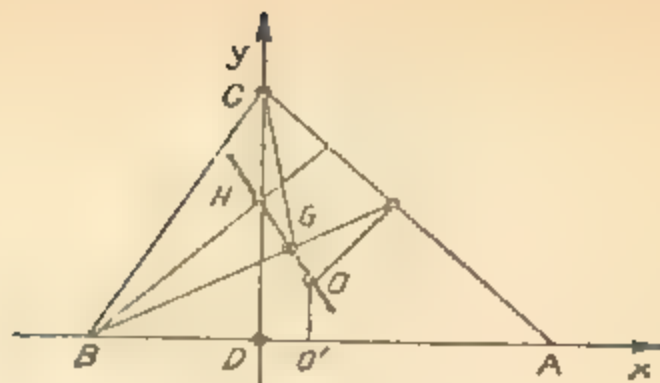


Fig. II.18

Soluție. Pentru $y = 0$, $a \neq 0$, găsim $x = -a$ și deci $A(-a, 0)$. Făcând $x = 0$, $a \neq -\frac{1}{2}$ obținem $y = -\frac{a^2}{2a+1}$ și astfel $B(0, \frac{-a^2}{2a+1})$. Dacă $a < -\frac{1}{2}$, atunci putem construi figura II.17.

1) Coeficientul unghiular al lui d_1 este $m_1 = 1$. Astfel d_1 are ecuația $y = x + a$.

2) Coeficientul unghiular al lui d_2 este $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1$. De aceea d_2 are ecuația

$$x + y + \frac{a^2}{2a+1} = 0.$$

3) Condiția ca M să fie pe dreapta dată este echivalentă cu condiția de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} x - y = -a \\ x + y = -\frac{a^2}{2a+1} \\ x + 5y = 1 \end{cases}$$

adică cu

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ 1 & 1 & -\frac{a^2}{2a+1} \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând acest determinant găsim $2(2a+1) + 5(-a^2 - a) + 3a^2 + a = 0$ sau $a^2 = 1$ adică $a = \pm 1$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că ortocentrul H , centrul de greutate G și centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC sunt coliniare.

Soluție. Se dau drept axe de coordonate latura BA și înălțimea DC . Se notează cu a și b abscisele punctelor A respectiv B și cu c ordonata lui C (cf. II.18).

Înălțimea CD are ecuația $x = 0$. Deoarece coeficientul unghiular al dreptei AC este $-\frac{c}{a}$ se găsește că ecuația înălțimii din B este $ax - by - ab = 0$. Rezultă $H(0, -\frac{ab}{c})$.

Coordonatele în joarelor segmentelor $[CA]$ și $[AB]$ sînt $(\frac{a}{2}, \frac{c}{2})$ respectiv $(\frac{a+b}{2}, 0)$. De aceea mediana din B are ecuația $cx - (a+2b)y - bc = 0$, iar mediana din C are ecuația $2cx + (a+b)y - c(a+b) = 0$. Rezultă $G(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3})$. De altfel acest lucru

se putea obține direct, deoarece coordonatele centrului de greutate sînt respectiv medii aritmetice ale coordonatelor vîrfurilor triunghiului.

Mediatoarea segmentului $[AD]$ are ecuația $x = \frac{a+b}{2}$, iar mediatoarea segmentului $[CA]$ are ecuația $y - \frac{c}{2} = -\frac{a}{c} \left(x - \frac{a}{2} \right)$. De aceea $O \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2+ab}{2c} \right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c^2+ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

punctele H , G și O sînt coliniare. Acest lucru poate fi dovedit și arătînd că $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

Notă. Scopul il problemei precedente este înd. pendent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă reperul cartezian care simplifică calculele.

§ 6. Fascicul de drepte

Presupunem că avem două drepte $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ care nu sînt paralele sau egale. Intersecția $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ este caracterizată prin sistemul linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \end{cases}$$

Reciproc, dacă se dă un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci el poate fi găsit ca intersecția dreptelor de ecuații $x = x_0$ și $y = y_0$. Este încă evident că prin M_0 trec o infinitate de drepte.

Definiție. Mulțimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct dat M_0 se numește fascicul de drepte. Punctul M_0 se numește vîrf fasciculului (fig. 11.19).

Teoremă. Dacă punctul M_0 este determinat ca intersecția dreptelor d_1 și d_2 , atunci ecuația unei drepte care care din fasciculul de vîrf M_0 este

$$r(a_1x + b_1y + c_1) + s(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \quad r^2 + s^2 \neq 0 \quad (r, s) \in \mathbb{R}^2.$$

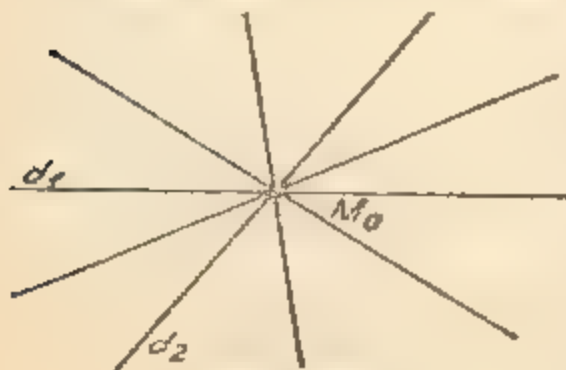


Fig. 11.19

Demonstrație. Deoarece vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2)$ sînt prin ipoteză necoliniari, adică formează o bază, orice vector nenul \vec{n} din plan se scrie în forma $\vec{n} = r\vec{n}_1 + s\vec{n}_2$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Ecuația dreptei care trece prin M_0 și are vectorul normal \vec{n} este cea scrisă în teoremă.

Ecuația din teorema precedentă se numește *ecuația fasciculului de vîrf M_0* .

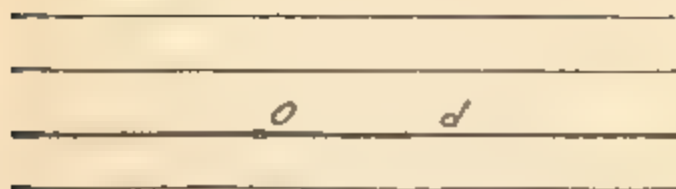


Fig. II. 20

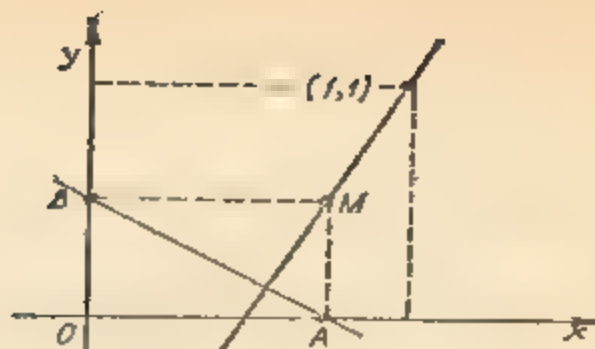


Fig. II. 21

Numerele reale r și s sînt parametri, cel puțin unul fiind nenul. De aceea în aplicații se lucrează fie cu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $t(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, fie cu $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ și $a_1x + b_1y + c_1 + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Fie $d: ax + by = 0$ o dreaptă care trece prin origine. Mulțimea tuturor dreptelor paralele sau egale cu d se numește *fascicul de drepte paralele*. Dreapta d se numește *linia de reper a fascicului* (fig. II. 20). Evident o dreaptă oarecare din fasciculul de drepte paralele cu linia de reper d are ecuația

$$ax + by + r = 0,$$

unde r este un parametru real. Aceasta ecuație se mai numește și *ecuația fascicului de drepte paralele*.

Observație. Reuniunea dreptelor dintr-un fascicul este planul p .

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian se dau punctele $A(r, 0)$, $B(0, s)$ și $M(x, y)$. Să se scrie ecuația carteziană a perpendicularei din M pe AB . Să se arate că dacă A și B sînt variabile astfel încît $r + s = 1$, atunci aceasta perpendiculară trece printr-un punct fix.

Soluție. Fie h dreapta ce trece prin M și este perpendiculară pe AB (fig. II. 21). Vectorul director al dreptei AB , adică $-r\vec{i} + s\vec{j}$, este vector normal pentru h . De aceea ecuația carteziană implicită a lui h este $-r(x - r) + s(y - s) = 0$, adică $-rx + sy + s^2 - r^2 = 0$.

Pentru r, s variabile, condiția $r + s = 1$ ne conduce la $r(1 - y - 2s) + 1 - y = 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, adică h trece printr-un fasciculul de drepte al cărui vîrf este soluția sistemului $x + y - 2 = 0$, $1 - y = 0$, adică $(1, 1)$.

2. Se dau dreptele $AB: x - 2y + 3 = 0$, $AC: 2x - y - 3 = 0$, $BC: 3x + 2y + 1 = 0$. Să se scrie ecuația carteziană a înălțimii din A a triunghiului ABC .

Soluție. Dreptele AB și AC determină fasciculul de ecuație $r(x - 2y + 3) + s(2x - y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Aceasta se transcrie sub forma $x(r + 2s) + y(-2r - s) + 3(r - s) = 0$. Selecționăm dreapta din fascicul perpendiculară pe BC , adică punem condiția $3(r + 2s) + 2(-2r - s) = 0$. Rezultă $r = 4s$. Aceasta împreună cu ipoteza $s \neq 0$ conduce la ecuația $2x - 3y + 3 = 0$.

3. Se dau patru drepte $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_1': x - 2y + 3 = 0$, $d_2: x + 3y - 2 = 0$, $d_2': -x + 2y + 3 = 0$.

1) Să se scrie ecuația carteziană a dreptei care trece prin punctele determinate de $d_1 \cap d_1'$ și $d_2 \cap d_2'$.

2) Să se găsească ecuația carteziană a dreptei care este paralelă cu d_1 și trece prin punctul determinat de $d_2 \cap d_2'$.

Soluție. 1) Fasciculul determinat de d_1 și d_1' are ecuația $r_1(2x + y - 1) + s_1(x - 2y + 3) = 0$, $r_1^2 + s_1^2 \neq 0$, iar fasciculul determinat de d_2 și d_2' are ecuația $r_2(x + 3y - 2) + s_2(-x + 2y + 3) = 0$, $r_2^2 + s_2^2 \neq 0$. Cele două ecuații reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă

$$\frac{2r_1 + s_1}{r_1 - s_1} = \frac{r_1 - 2s_1}{3r_2 + 2s_2} = \frac{-r_1 + 3s_1}{-2r_2 + 3s_2}.$$

Utilizând primul din acest sistem rezultă dreapta de ecuație $4x + 7y - 9 = 0$.

2) Dreapta d paralelă cu d_1 are ecuația $2x + y - t = 0$. Să impune condiția

$$\frac{2}{r_2 - s_2} = \frac{1}{3r_2 + 2s_2} = \frac{-t}{-2r_2 + 3s_2}.$$

Rezultă $t = 5$ și deci $2x + y - 5 = 0$.

§ 7. Dreapta orientată

Fie d o dreaptă din plan. Pe dreapta d se pot stabili două și numai două sensuri de parcurgere (ori în ambele punctele de pter) pe care convenim să le notăm cu $(+)$, $(-)$ și pe care le reprezentăm prin săgeți.

Definiție. O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește **dreaptă orientată**.

Dacă \vec{a} este vectorul director al lui d , atunci este natural să-i atașăm lui d sensul lui \vec{a} și să notăm acest sens cu $(+)$. Acest lucru va fi admis în continuare (fig. II.22).

Fie $d = \{M \mid \overline{M_0M} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$ o dreaptă orientată prin \vec{a} . Ordinca pe \mathbb{R} a lui d , indicată de sensul vectorului director \vec{a} , este coerentă cu ordinea pe \mathbb{R} . Mulțimea $d_1 = \{M \mid \overline{M_0M} = t\vec{a}, t \geq 0\}$ se numește **partea pozitivă** a lui d înmulțimea $d_2 = \{M \mid \overline{M_0M} = t\vec{a}, t \leq 0\}$ se numește **partea negativă** a lui d . Partea pozitivă și partea negativă sînt semidrepte ale lui d terminate de punctul M_0 .

Orice două coordonate Ox și Oy sînt exemple de drepte orientate, iar originea le împarte în **semiaxe pozitive și negative**.

Orice dreaptă orientată

$$d = \{M \mid \overline{M_0M} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$$

poate fi scrisă în forma

$$d = \left\{M \mid \overline{M_0M} = s\vec{e}, s \in \mathbb{R}, \vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}\right\}.$$

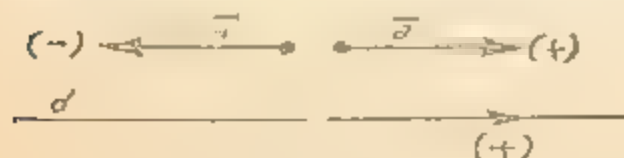


Fig. II. 22

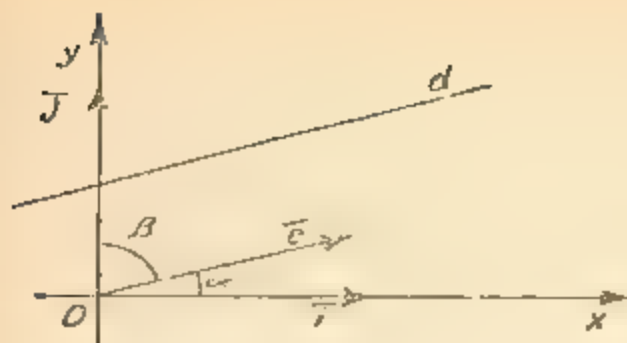


Fig. 11. 23

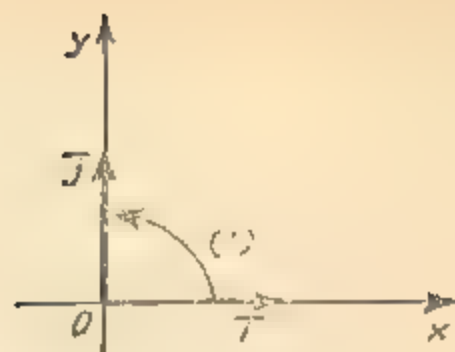


Fig. 11. 24

Unghiurile α și β dintre *versorul director* \vec{e} și versorii \vec{i} respectiv \vec{j} se numesc *unghiuri de direcție* ale dreptei orientate d (fig. 11. 23). Fie u, v coordonatele lui \vec{e} . Coordonatele versorului \vec{e} ,

$$\cos \alpha = \vec{e} \cdot \vec{i} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \cos \beta = \vec{e} \cdot \vec{j} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

se numesc *cosinusurile de direcție* ale dreptei orientate d . Ele satisfac relația

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

În cele precedente am arătat ce se înțelege prin orientarea unei drepte privită ca spațiu cu o dimensiune de sine stătătoare, adică din punctul de vedere al unui „observator” situat în această dreaptă. Dar în unele probleme este necesar să privim dreapta din punctul de vedere al unui „observator” din planul orientat. Elementul de bază în studiul dreptei în raport cu planul este *normala dreptei*.

În plan se pot stabili două și numai două sensuri de rotație: sensul trigonometric (+) și sensul inversul acelor de ceasornic (-). Planul împreună cu un sens de rotație fixat se numește *plan orientat* (fig. 11. 21).

Teoremă. În planul orientat, noțiunea unui sens de *plăcut* pe o dreaptă este echivalentă cu noțiunea unui sens pe normală.

Demonstrație. Prin convenție sensul rotației directe în plan este sensul trigonometric.

Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$ orientată cu ajutorul vectorului director $(a, -b)$. Rotind în sens direct cu un unghi de măsura $\pi/2$ (vezi fig. 11. 25), din vectorul $(b, -a)$ găsim vectorul $\vec{n}(a, b)$ care determină o orientare pe normala dreptei d . Raționamentul reciproc este evident (fig. 11.25).

Având în vedere teorema precedentă, în planul orientat se admite definiția: o dreaptă d împreună cu o alegere a sensului pe normală se numește *dreaptă orientată*.

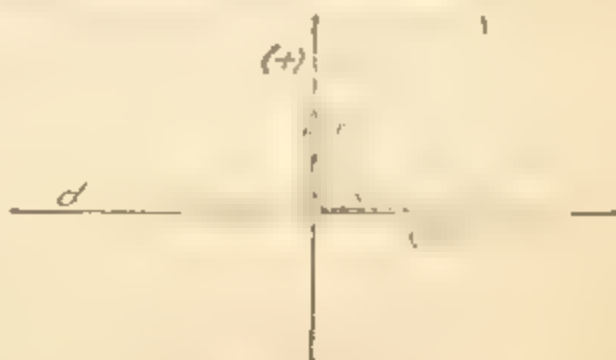


Fig. 11. 25



Fig. II. 26

Presupunem că d_1 și d_2 sînt drepte orientate prin vectorii directori $\vec{a}_1(u_1, v_1)$ și $\vec{a}_2(u_2, v_2)$. Prin unghiul dintre dreptele orientate d_1 și d_2 vom înțelege unghiul dintre \vec{a}_1 și \vec{a}_2 , adică unghiul definit prin (fig. II.26)

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1\| \|\vec{a}_2\|} = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Presupunem că d_1 și d_2 sînt drepte orientate prin vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. În acest caz unghiul dintre dreptele orientate d_1 și d_2 este unghiul dintre vectorii \vec{n}_1 și \vec{n}_2 , adică (fig. II.26)

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Aplicație. *Hiraport* la o dreaptă $d: x_0 + My = u_0 + tv$, $t \in \mathbb{R}$, dreaptă orientată prin vectorul director $\vec{v} = (v_1, v_2)$, M, N două puncte ale acestei drepte. Numărul φ_{MN} definit prin $MN = \varphi_{MN} \vec{v}$ se numește *racina relativă a segmentului* $[MN]$.

Considerăm că pe dreapta d au fost fixate punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ corespunzătoare valorilor t_1, t_2, t_3, t_4 ale parametrului (fig. II.27). Numărul

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\varphi_{M_1 M_2}}{\varphi_{M_3 M_2}} \cdot \frac{\varphi_{M_3 M_4}}{\varphi_{M_1 M_4}} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_1}$$

se numește *hiraport* al cuadrupletului (M_1, M_2, M_3, M_4) . Un *hiraport de vulcan* -1 se numește *armonic*; în acest caz, dreapta d este o bisecă (M_2, M_4) divide armonic perechea (M_1, M_3) . Diviziunea armonică este deci caracterizată prin

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_1} = -1.$$

Dacă M_1 este luat drept origine pe d , adică $t_1 = 0$, atunci această ecuație se reduce la

$$\frac{2}{t_3} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4}.$$

Cu alte cuvinte t_3 este medie armonică a numerelor t_2 și t_4 .



Fig. II. 27

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau dreptele $d_1: x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$, $t \in \mathbb{R}$ și $d_2: x - y + 1 = 0$.

1) Să se orienteze d_1 și d_2 .

2) Să se determine unghiurile directoare ale dreptelor d_1 și d_2 .

3) Să se găsească unghiul dintre d_1 și d_2 .

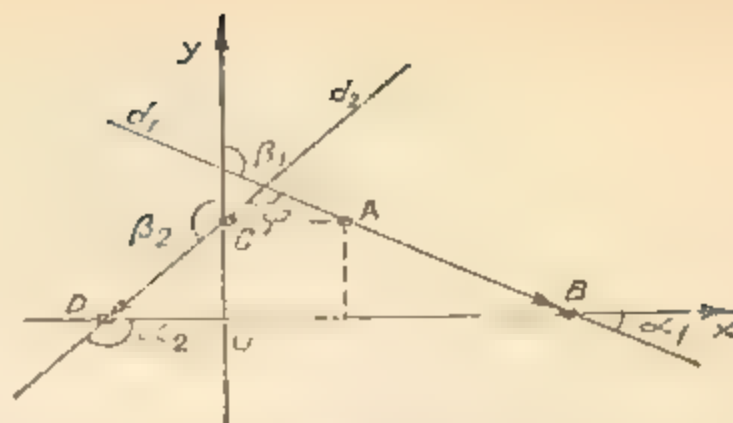


Fig. II. 28

Soluție (fig. II. 28). 1) Dreapta d_1 trece prin punctul $A(1,1)$ și are vectorul director $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Fie B punctul de pe d_1

cu proprietatea $AB = \vec{a}$, adică $B(3, 0)$. Sensul pozitiv pe d_1 este sensul de la A la B .

Dreapta d_2 trece prin punctul $C(0, 1)$ și are vectorul normal $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j}$. Vectorul director al lui d_2 este $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$. Fie D punctul de pe d_2 cu proprietatea $CD = \vec{b}$, adică $D(-1, 0)$. Sensul pozitiv pe d_2 este sensul de la C la D .

2) Fie $\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\vec{i} - \vec{j})$ versorul director care are același sens cu \vec{a} . Un-

ghiul de direcție α_1, β_1 ale dreptei d_1 rezultă din $\cos \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, adică $\alpha_1 = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\beta_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Analog găsim că $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\beta_2 = \frac{3\pi}{4}$ sînt unghiurile directoare ale lui d_2 .

3) Unghiul φ dintre d_1 și d_2 se determină din

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{-2 + 1}{\sqrt{5} \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}},$$

adică $\varphi = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$.

2. Se consideră dreptele $d_m: x = \frac{2}{m} - \frac{y}{m^2}$, unde m este un parametru real nenul. Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului? Dacă patru drepte din familia d_m trec pe Ox în puncte care formează o diviziune armonică, ce se poate spune despre punctele corespunzătoare de pe Oy ?

Soluție Se observă că $d_m: m^2x - 2m - y = 0$. Se constată ușor că prin fiecare punct al mulținii $(Ox \cup Oy) - \{0\}$ trece o singură dreaptă d_m . Pentru $x \neq 0$ și $y \neq 0$, ecuația de gradul doi în m are soluțiile reale numai dacă $1 - xy \geq 0$. Rezultă: prin fiecare punct (x, y) caracterizat prin $xy < 1$ trece o singură dreaptă d_m , prin fiecare punct (x, y) care satisface relațiile $xy < 1$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ trec două drepte distincte, prin punctele (x, y) care satisfac relația $xy > 1$ nu trece nici o dreaptă.

Fie dreptele d_i , $i = 1, 2, 3, 4$, care taie pe Ox în puncte de abscise x_i , $i = 1, 2, 3, 4$, care formează o diviziune armonică, adică

$$\frac{x_2 - x_4}{x_3 - x_4} : \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = -1.$$

Evident $x_i = \frac{2}{m_i}$. De aceea relația precedentă se transcrie

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_2} : \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_3} = -1.$$

Dreptele d_m determină pe Oy punctele de ordinate $y_i = 2/m_i$. De aceea

$$\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_3} = -1$$

și astfel punctele de pe Oy formează o diviziune armonică.

§ 2. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1) Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan și h o dreaptă de ecuație $ax + by + c = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ proiectia lui M_0 pe dreapta h (Fig. 11.29). Lungimea $\|M_1M_0\|$ se numește *distanță de la punctul M_0 la dreapta h* și se notează cu $d(M_0; h)$. Analogic, $d(M_0; h)$ se poate obține din identitatea

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = (\pm 1) \|\vec{n}\| d(M_0; h),$$

factorul ± 1 avînd semnul produsului scalar din partea stîngă. Deci

$$d(M_0; h) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{\|\vec{n}\|}$$

sau

$$d(M_0; h) = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Deoarece $M_1 \in h$, rezultă că $ax_1 + by_1 + c = 0$, deci

$$d(M_0; h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2) Să presupunem acum că h este o dreaptă terminată de punctele distincte $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ și să scriem ecuația sa în formă

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $M_1(x_1, y_1)$ este un alt punct din plan și dacă notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

atunci

$$d(M_1; h) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}.$$

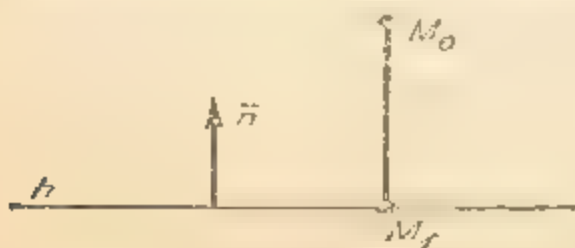


Fig. 11. 29

De aceea aria

$$A = \frac{\|\vec{M_1 M_2}\| \cdot d(M_1; M_2 M_3)}{2}$$

a triunghiului $M_1 M_2 M_3$ poate fi calculată cu formula

$$A = \frac{1}{2} |\Delta|.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian xOy se dau punctele $A(1, -1)$, $B(3, 2)$. Să se scrie ecuația carteziană a dreptei AB și să se găsească distanța de la origine la dreapta AB .

Soluție. Ecuația, sub formă de rapoarte, a dreptei AB este $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$. Ea se scrie în forma echivalentă $3x - 2y - 5 = 0$. Rezultă

$$d(O; AB) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

2. Se dau punctul $M(3, 3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele $AB: x + 2y - 4 = 0$, $BC: 3x + y - 2 = 0$, $CA: x - 3y - 4 = 0$.

1) Să se calculeze aria triunghiului ABC .

2) Fie P, Q, R proiecțiile punctului M respectiv pe OA, OB și AB . Să se demonstreze că punctele P, Q, R sunt coliniare.

3) Să se scrie ecuația fasciculului de drepte determinat de dreptele AB și AC . Să se găsească ecuația dreptei din fascicul, care trece prin punctul $N(0, 5)$.

Soluție (Fig. II. 30) 1) $\{A\} = AB \cap AC = A(4, 0)$, $\{B\} = AB \cap BC = B(0, 2)$, $\{C\} = BC \cap CA = C(1, -1)$. Ținând seama de formula găsim aria $(ABC) = \frac{1}{2} |\Delta| = 5$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

2) Dreapta MR are ecuația carteziană explicită $y - 3 = 2(x - 3)$. De aceea $\{R\} = AB \cap MR: x + 2y - 4 = 0, 2x - y = 0 \Rightarrow R(2, 1)$. Ținând seama că $P(3, 0)$, $Q(0, 3)$, se verifică condiția de colinearitate,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

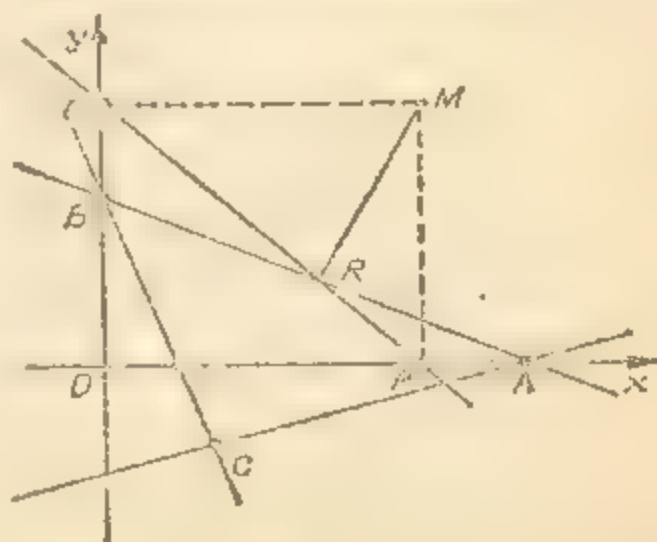


Fig. II. 30

3) Ecuația fasciculului determinat de dreptele AB și PQ $x + y - 3 = 0$ este $r(x + 2y - 4) + s(x + y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Dreapta din fascicul care trece prin $N(0,5)$ corespunde valorilor r și s care verifică condiția $3r + s = 0$, $s \neq 0$. Ecuația acestei drepte este $2x + y - 5 = 0$.

§ 9. Locuri geometrice

O mulțime de puncte din plan, definită prin specificarea unor proprietăți geometrice ale elementelor sale, se numește *loc geometric*.

În esență, problema de loc geometric sînt probleme de găsire a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime, sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi. Dar rezolvarea unei probleme de tipul (1) „*punctele unei mulțimi au proprietatea P dacă și numai dacă au proprietatea Q* ” nu este totuna cu rezolvarea unei probleme de tipul (2) „*să se găsească locul geometric al punctelor care au proprietatea P* ”. În general, în problema (2) proprietatea P este dată a tîl încît nu este evident cu ce figură geometrică avem de a face (ipoteză), iar proprietatea Q nu este specificată. Ea poate fi aleasă de rezolvitor din mulțimea proprietăților echivalente cu P de așa manieră încît să poată spune că ce figură geometrică este echivalentă mulțimii dată inițial.

Rezolvarea efectivă a unei probleme de loc geometric constă în următoarele:

1) *Verifica ca există cel puțin un punct care poartă proprietatea dată, adică stabilirea faptului că mulțimea dată este vidă sau nu.*

2) *Se consideră un punct (variabil) care poartă proprietatea dată și se stabilește opțiunea care este punctul la o figură geometrică f .*

3) *Se verifică dacă orice punct al lui f poartă proprietatea dată și se arată că dacă este suficient ca un punct să aparțină lui f să poartă proprietatea specificată. De cele mai multe ori rezultă că nu putem accepta decât o parte (f') a lui f .*

Figura (f') este locul căutat deoarece:

— orice punct care poartă proprietatea dată aparține necesar lui (f');
— este suficient ca un punct să aparțină lui (f') pentru a avea proprietatea dată.

Din punct de vedere analitic determinarea unui loc geometric este echivalentă cu găsirea ecuației analitice a mulțimii care prezintă loc geometric respectiv în raport cu un reper cartezian.

PROBLEME REZOLVATE

1. Locul geometric al punctelor egal de părtate de două drepte concurente este *reunirea bisectoarelor unghiurilor acestor drepte*. Să se determine ecuațiile celor două bisectoare.

Soluție Fie dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Condiția de concurență este $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, iar punctul comun are coordonatele:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Evident acest punct aparține locului geometric cautat. Fie acum $M_0(x_0, y_0)$ un punct egal depărtat de d_1 și d_2 , adică

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ținând seama de proprietățile modulelor și de faptul că indicele o poate fi lăsat deoparte, găsim ecuațiile

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe e de constantă.

Soluție Fie A și B două puncte fixe distanțate și k un număr real. Cautăm locul geometric al punctelor M pentru care $d^2(M, A) - d^2(M, B) = k$.

Fie $k = 0$; atunci $d(M, A) = d(M, B)$ și deci M descrie mediatoarea segmentului $[AB]$.

Fie $k \neq 0$ și O mijlocul lui $[AB]$. Fixând reperul cartezian ca în figura II-31, rezultă $O(0,0)$, $M(x, y)$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $a > 0$ și relația de definiție este echivalentă cu $[(x+a)^2 + y^2] - [(x-a)^2 + y^2] = k$, adică $x = \frac{k}{4a}$. Astfel M aparține dreptei d .

$x = \frac{k}{4a}$, perpendiculară pe AB , care taie pe AB în punctul $C\left(\frac{k}{4a}, 0\right)$. Reciproc, orice punct $M \in d$ satisface condiția inițială și deci locul geometric căutat este dreapta d .

3. Se dau dreptele fixe $d: y = 1$, $d': y = 2$ și dreapta variabilă $d_\alpha: y = \frac{x}{\sin \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Fie $\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha$, $\{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $[A_\alpha B_\alpha]$.

Soluție (fig. II-32). Deoarece $0 < |\sin \alpha| < 1$, pentru $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pozițiile limită ale dreptei d sînt cele două bisectoare $y = x$ și $y = -x$. Pe lângă aceasta se observă că

$$\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x}{\sin \alpha} \end{cases}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow A(\sin \alpha, 1), \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

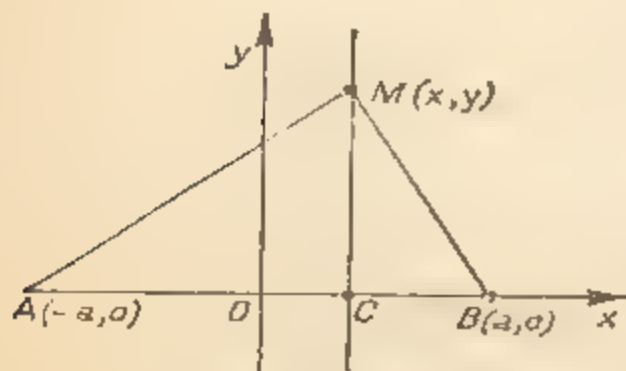


Fig. II-31

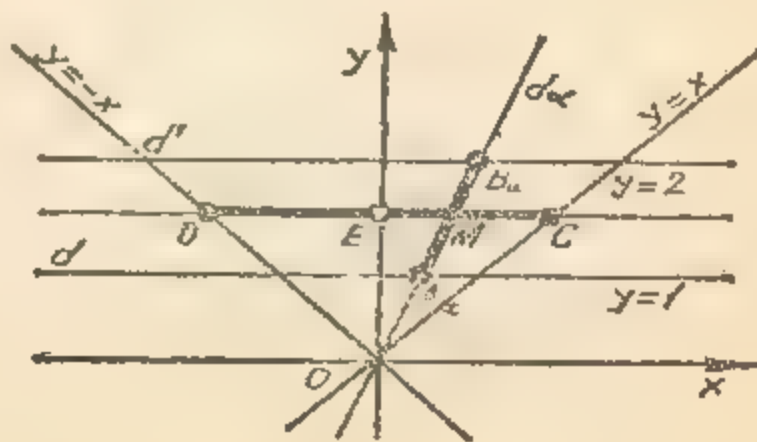


Fig. II-32

$$\{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow B(2 \sin \alpha, 2), \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Înlocuim M al segmentului $[d_\alpha B_\alpha]$ are coordonatele

$$x = \frac{3 \sin \alpha}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă $x \in \left[-\frac{3}{2}, 0 \right] \cup \left(0, \frac{3}{2} \right]$, $y = \frac{3}{2}$, adică locul geometric al punctului M este $[DC] - \{D\}$, unde $D\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ și $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ sînt punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $y = \frac{3}{2}$ cu cele două bisectoare.

§ 10. Semiplane

O dreaptă d din plan are proprietatea că separă planul p în două submulțimi.

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$. Definim mulțimile

$$p^- = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}, \quad d = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\},$$

$$p^+ = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}.$$

Se observă că

$$p^- \cap p^+ = \emptyset, \quad p^- \cup d \cup p^+ = p.$$

Teoremă. (fig. II. 31) 1) Mulțimile $p^-, p^+, p^- \cup d, p^+ \cup d$ sînt convexe.

2) $\forall M_1 \in p^-, \forall M_2 \in p^+$, segmentul care unește pe M_1 cu M_2 intersectează pe d .

Demonstrație. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Segmentul $[M_1 M_2]$ care unește pe M_1 cu M_2 are ecuațiile parametrice $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. 1) Presupunem $M_i(x_i, y_i) \in p^-, i = 1, 2$ adică $f(x_i, y_i) = ax_i + by_i + c < 0$, $i = 1, 2$. Deoarece $f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) < 0$, $\forall t \in [0, 1]$, rezultă $[M_1 M_2] \subset p^-$. Astfel p^- este convexă.

Pentru celelalte mulțimi se procedează analog.

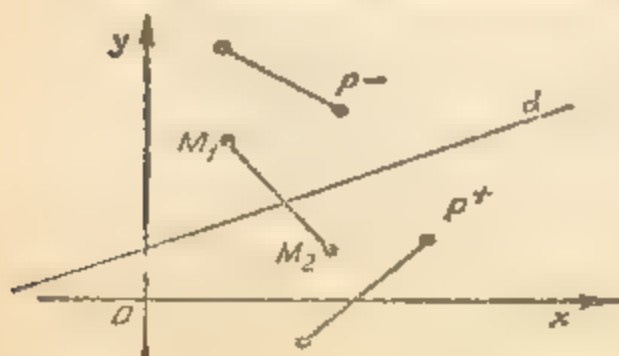


Fig. II. 33

2) Presupunem $M_1(x_1, y_1) \in p^-$, adică $f(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c < 0$; $M_2(x_2, y_2) \in p^+$, adică $f(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c > 0$. Rezultă $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) = (1-t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2)$, $t \in [0, 1]$. Deoarece $\varphi([0, 1])$ este segmentul din \mathbb{R} care unește pe $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ cu $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$, există o valoare $t_0 \in [0, 1]$

astfel încît $0 = \varphi(t_0) = a((1 - t_0)x_1 + t_0x_2) + b((1 - t_0)y_1 + t_0y_2) + c$. Deci $d \cap [M_1, M_2] = \{((1 - t_0)x_1 + t_0x_2, (1 - t_0)y_1 + t_0y_2)\}$.

Implicit în această demonstrație am admis că un punct separă pe \mathbb{R} .

Mulțimile p^- și p^+ se numesc *semiplane deschise*, iar mulțimile $p \cup d$, $p^+ \cup d$ se numesc *semiplane închise*. Dreapta d se numește *frontiera* semiplanelor.

Având în vedere că f ia o valoare constantă pentru punctele unui semiplan, pentru aflarea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_0, y_0) și să vedem ce semn are valoarea lui $f(x_0, y_0)$.

Deoarece semiplanurile sînt mulțimi convexe, orice intersecție de semiplane este o mulțime convexă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor $d_\alpha : x + y = \alpha$, $d'_\alpha : x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ este semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geq 1$.

Soluție. Dreptele d_α sînt situate în semiplanul închis $x + y \geq 0$, iar dreptele d'_α sînt situate în semiplanul închis $x - y \geq -2$. Locul geometric se va afla în zona nehașurată în figura II. 34.

Eliminăm α din ecuația α cu $x + y = \alpha$, $x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ rezultă semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geq 1$.

2. Fie ecuația

(E) $x^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2xy \operatorname{tg} \varphi + y^2 \sin^2 \varphi = 0$, unde $\varphi \neq k\pi$; $(2l + 1) \frac{\pi}{2}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

1) Se consideră ecuația (E) ca avînd necunoscutele x și y și parametrul φ ; se notează cu α și β unghiurile pe care le face cu axa Ox dreptele definite prin (E). Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$. Apoi, presupunînd $\varphi = \frac{\pi}{4}$, să se scrie ecuația comună a bisectoarelor unghiurilor formate de cele două drepte.

2) Considerînd ecuația (E) ca avînd necunoscuta φ și parametrii y și x să se determine regiunea din planul xOy pentru care ea admite soluții.

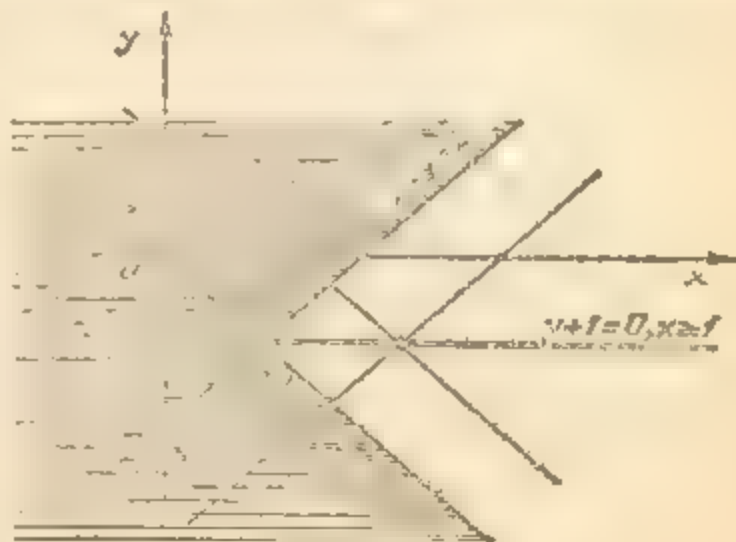


Fig. II. 34

Soluție 1) Se observă că $x = 0$ implică $y = 0$ și reciproc. Apoi, pentru $x \neq 0$, ecuația (E) se transcrie

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 \frac{y}{x} \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0.$$

Rezultă

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm 1.$$

Astfel $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{tg} \beta$ pot avea valorile $\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm 1$. De aceea $|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta| = 2$.

Pentru $\varphi = \frac{\pi}{4}$ găsim dreptele $y = 3x$ și $y = x$. Bisectoarele unghiurilor determinate de ele sînt $\frac{y - 3x}{\sqrt{10}} = \pm \frac{y - x}{\sqrt{2}}$. Ecuația comună este

$$\left(\frac{y - 3x}{\sqrt{10}} - \frac{y - x}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{y - 3x}{\sqrt{10}} + \frac{y - x}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ sau } x^2 + xy - y^2 = 0.$$

2) Pentru $x \neq 0$ se observă că ecuația (E) este echivalentă cu $\frac{y}{x} = \frac{2}{\sin 2\varphi} \pm 1$ sau cu $\sin 2\varphi = \frac{2x}{y \pm x}$. Aceasta are soluția numai dacă $\left| \frac{2x}{y \pm x} \right| \leq 1$. Explicînd condițiile găsim că punctul (x, y) trebuie să se afle în intersecția regiunilor: $x > 0$, $y + x \leq 0$, $x < 0$, $y - x \leq 0$, $x > 0$, $y + x \geq 0$, $x < 0$, $y - x \geq 0$, $x > 0$, $y - x \leq 0$, $x < 0$, $y + x \geq 0$, $x > 0$, $y - x \geq 0$, $x < 0$, $y + x \leq 0$, adică în porțiunea dublu hașurată din figura 11. 35

3. Să se determine coeficientul unghiular al dreptei d , dată prin ecuația $(a + b + 1)x - (2a - b)y - 3 = 0$, în funcție de coordonatele unui punct $P(a, b)$, raportat la un perimetru cartezian Ox, Oy .

Soluție Fie m coeficientul unghiular al dreptei d . Avem $m = -\frac{a + b + 1}{2a - b}$, $2a - b \neq 0$. Dreptele $d_1: a + b + 1 = 0$ și $d_2: 2a - b = 0$ împart planul în patru regiuni (fig. 11. 36). Notînd $f_1(a, b) = a + b + 1$ și $f_2(a, b) = 2a - b$, semnul lui m este dat în tabelul 2.

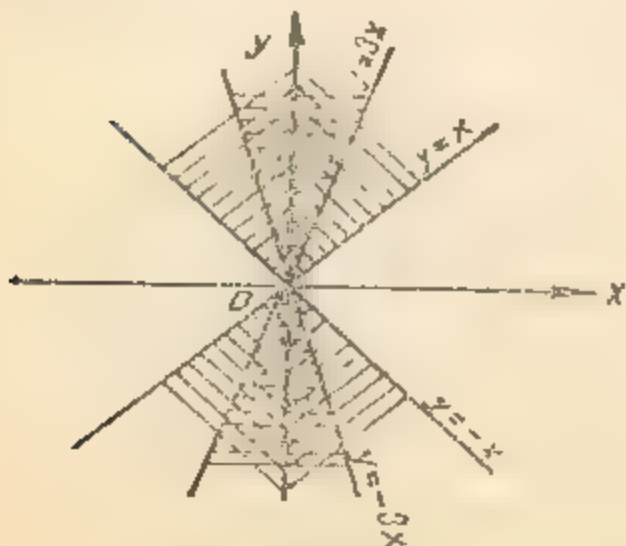


Fig. 11. 35

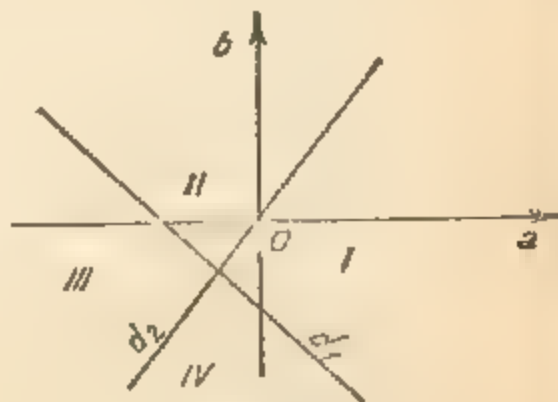


Fig. 11. 36

Regiunea	$f_1(a, b)$	$f_2(a, b)$	m
I	+	+	-
II	+	-	+
III	-	-	-
IV	-	+	+

TABELUL 2

§ 11. Probleme de programare liniară în două variabile

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$.

Teoremă. Dacă funcția f se anulează în trei puncte distincte necoliniare, atunci ea este nulă peste tot.

Demonstrație. Fie $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Ipotezele

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

implică $a = b = c = 0$ și deci $f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Consecință. Dacă f are valori egale în trei puncte distincte necoliniare, atunci f este o funcție constantă.

Teoremă. Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o suprafață poligonală convexă (privită ca intersecție de semiplane), iar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este o funcție constantă, atunci fiecare dintre numerele $\min_{(x,y) \in S} f(x, y)$ sau $\max_{(x,y) \in S} f(x, y)$ este atins cel puțin într-un vârf al lui S și cel mult pe o latură a lui S .

Demonstrație. Ecuația $ax + by + c = f = 0$ reprezintă un fascicul de drepte paralele cu linia de reper $\Delta_f: ax + by = 0$. Se observă că distanța de la $O(0, 0)$ la dreapta $\Delta_f: ax + by + c = f = 0$ este

$$d = \frac{|f - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Această relație arată că extremele funcției $f = c$ sînt proporționale cu extremele lui d . Ducind $OP \perp \Delta_f$, $RQ \perp \Delta_f$ (fig. 11.37) avem $RQ = d$ și deci extremele lui d vor fi atinse cel puțin în unele vîrfuri ale lui S și cel mult pe o latură a lui S .

Generalizare. Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o intersecție de semiplane care posedă cel

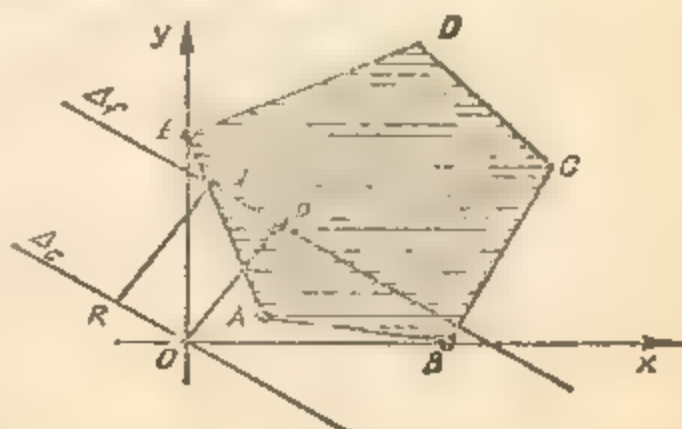


Fig. 11.37

puțin un vîrf, atunci unul dintre numerele $\min_{(x,y) \in S} f(x, y)$ sau $\max_{(x,y) \in S} f(x, y)$, acel care există, este atins cel puțin într-un vîrf al lui S .

Problemele de programare liniară în două variabile sînt probleme de următorul tip: să se determine minimumul sau maximumul funcției $(x, y) \rightarrow f(x, y) = ax + by + c$ cu restricțiile $x \geq 0, y \geq 0, a_1x + b_1y \geq c_1, i = 1, 2, \dots, m$.

Avînd în vedere teorema precedentă, rezolvarea unui program liniar în două variabile se poate face în felul următor. Se trasează dreptele de ecuații $x = 0, y = 0, a_1x + b_1y = c_1, i = 1, 2, \dots, m$, și ținînd seama de teorema referitoare la separarea planului în regiuni se pune în evidență mulțimea convexă S . Se determină vîrfurile lui S și apoi se compară valorile lui f în aceste puncte. Evident această metodă nu este eficientă decât dacă numărul de restricții este relativ mic.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un atelier produce două tipuri de piese A și B . Tipul A este calitativ superior tipului B . Beneficiul net este de 2 lei pentru tipul A și de 1,5 lei pentru tipul B . Timpul de fabricație pentru tipul A este de două ori mai mare decât timpul de fabricație pentru B . Dacă toate piesele ar fi de tipul B , atelierul ar putea produce 1000 piese pe zi. Aproximarea costurilor materiale aunge pentru 800 piese (tipul A și B), iar capacitatea atelierului este cel mult 400 piese de tipul A și 700 piese de tipul B .

Cîte piese de tipul A și cîte de tipul B trebuie fabricate într-o zi pentru ca beneficiul total al atelierului să fie maxim?

Soluție. Fie x și y numărul de piese de tipul A respectiv B . Restricțiile sînt

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 400, & 0 \leq y \leq 700 \\ x + y \leq 800 \\ 2x + y \leq 1000, \end{cases}$$

iar funcția de optimizat este definită prin

$$f(x, y) = 2x + \frac{3}{2}y.$$

Construim dreptele de ecuații $x = 400, y = 700, x + y = 800, 2x + y = 1000$ și astfel obținem hexagonul $OABCDE$ unde $O(0, 0), A(0, 700), B(100, 700), C(200, 600), D(400, 200), E(400, 0)$ (fig. 11.38). Punctele din interiorul și de pe laturile acestui hexagon satisfac restricțiile problemei.

Deoarece $f(0, 0) = 0, f(0, 700) = 1050, f(100, 700) = 1250, f(200, 600) = 1300, f(400, 200) = 1100, f(400, 0) = 800$ rezultă că punctul de maxim este $C(200, 600)$, iar $\max f(x, y) = 1300$.

2. O secție a unei fabrici produce două tipuri de aparate. Pentru aceasta

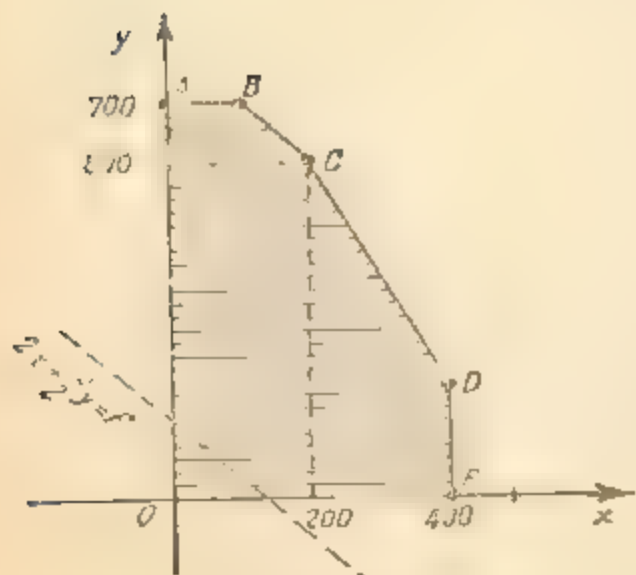


Fig. 11.38

are nevoie de piese furnizate de o altă întreprindere, fiind însă obligată să comande zilnic cel puțin o cantitate de piese din care să ai putea face 80 de aparate de primul tip sau 60 de aparate de al doilea tip. Capacitatea de montaj este de cel mult 100 de aparate pe zi din ambele tipuri. Zilnic sînt solicitate la vânzare cel puțin 40 de aparate de primul tip și cel puțin 20 de aparate de al doilea tip. Pentru realizarea unui aparat de primul tip se cheltuiesc 2 000 lei, iar pentru realizarea unui aparat de al doilea tip se cheltuiesc 4 000 lei. Să se stabilească planul de producție zilnic care se realizează cu minimum de cheltuieli.

Soluție. Notînd cu x și y numărul de aparate sîntem conduși la următoarele restricții

$$\begin{cases} \frac{ax}{80} + \frac{ay}{60} \geq a, \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 40, y \geq 20, \\ x, y = \text{numere întregi, iar } a \text{ este cantitatea minimă de piese impusă de furnizori.} \end{cases}$$

Funcția obiectiv reprezintă cheltuielile, adică $f(x, y) = 2\,000x + 4\,000y$. Iar, din cauza condiției $x, y = \text{întregi}$, patrulateralul restricțiilor $ABCD$ are vîrfurile $A\left(\frac{100}{3}, 20\right)$, $B(80, 20)$, $C(40, 60)$, $D(40, 80)$. Găsim $f(A) = \frac{560\,000}{3}$, $f(B) = 240\,000$, $f(C) = 320\,000$, $f(D) = 200\,000$, adică $A\left(\frac{100}{3}, 20\right)$ este punctul de număr pentru problema modificată (fig. II. 39).

Se așteaptă să verificăm punctul $M_0(420)$. Se constată că $f(M_0) < f(x, y)$, $\forall (x, y)$ din patrulateralul $ABCD$, $x, y = \text{întregi}$. De aceea $x = 54$, $y = 65$ nu $f(x, y) = 158\,000$ este soluția problemei.

3. Să se găsească maximumul funcției $z = 4(1 + \lambda)x + 2y$ pe mulțimea $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 6$, $3x + 2y \leq 10$, știind că λ este un parametru real.

Soluție. Se observă că punctele din interiorul și de pe laturile triunghiului din figura II. 40 satisfac restricțiile problemei. Apoi, formăm schema de pentru a rezolva un program linear care suficient să examinăm numai vîrfurile. De aceea calculăm $z_0 = 0$, $z_A = \frac{40}{3}(1 + \lambda)$ și $z_B = 10$. Comparînd aceste trei numere ajungem la concluzia că

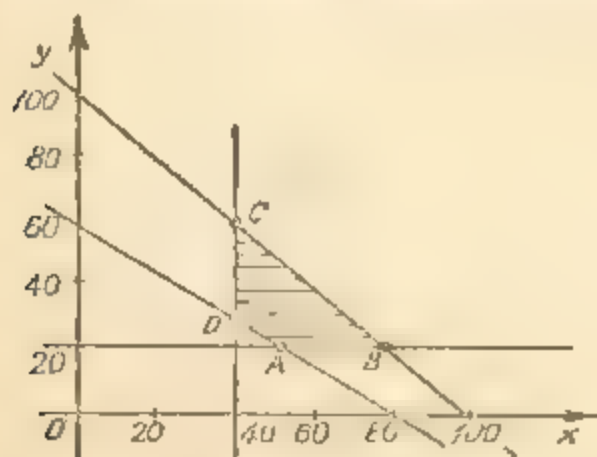


Fig. II. 39

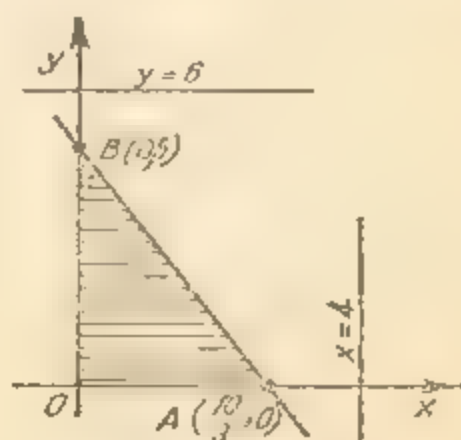


Fig. II. 40

pentru $\lambda \leq -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_B = 10$ și B este punctul de maxim, iar pentru

$\lambda > -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_A = \frac{40}{9}(1 + \lambda)$ și A este punctul de maxim.

§ 12. Probleme propuse

1. Într-un reper ortonormat $\{O; i, j\}$, se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(6, -1)$, $C(7, 4)$.

1) Să se găsească coordonatele punctului D astfel încât $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$

2) Să se găsească coordonatele punctului E , astfel încât $\angle E = 2\angle E\hat{B}$.

$$\text{R. 1) } D(12, 1); \quad 2) E\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{9}\right).$$

2. Pe o mașină de găurit în coordonate avem de prelucrat piesă din figura II. 41. Să se determine coordonatele carteziene și coordonatele polare ale punctelor A , B , C , D în care urmează să se realizeze găurirea.

3. În planul p se consideră reperul cartezian xOy . Să se arate că nu există nici un triunghi echilateral cu toate vîrfurile de coordonate numere întregi.

Indicație. Se presupune că $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$ sînt vîrfurile, a, b, c, d fiind întregi. Notînd cu r pătratul lungimii laturilor și folosind identitatea $(ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2$ rezultă contradicția $\frac{2(ad - bc)^2}{r} = \sqrt{3}$, expresia din stînga fiind un număr rațional.

4. Să se scrie ecuația carteziană a dreptei d determinată de punctul $M_0(x_0, y_0)$ și vectorul director $\vec{d}(u, v)$:

1) $M_0(2, 1)$, $\vec{d}(1, 3)$.

2) $M_0(2, 1)$, $\vec{d}(1, -1)$.

5. Să se găsească mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan ale căror coordonate verifică relația:

$$1) \sin 3y = -\cos 2x,$$

$$2) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} + y \right) = 0,$$

$$3) |x| + |y| = 4.$$

$$\text{Indicație. } 1) \frac{\pi}{2} - 3y = \pm(\pi - 2x) + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}; \quad 2) \frac{\pi}{8} + y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Să se găsească ecuațiile laturilor și coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului ABC ale cărui vîrfuri sînt punctele $A(5, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-3, -2)$.

7. Latura $[AB]$ a unui triunghi ABC este situată pe dreapta $d: 3x + 2y - 16 = 0$.

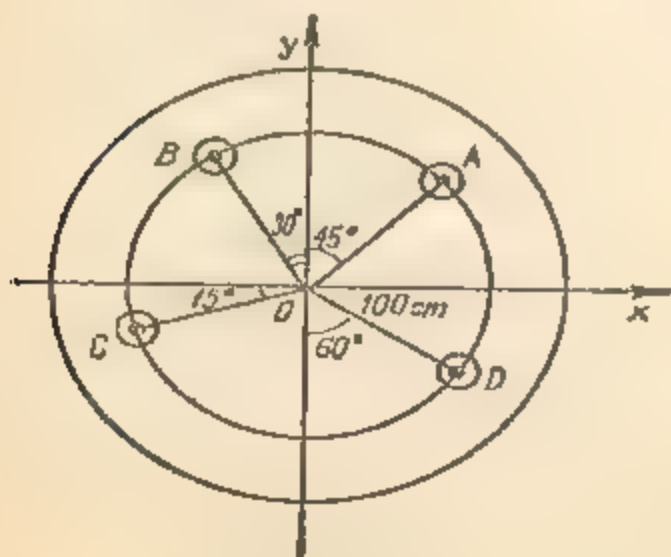


Fig. II. 41



Fig. II. 42



Fig. II. 43

Să se determine coordonatele vîrfurilor triunghiului, știind că abscisele vîrfurilor A și B sînt egale cu 2, respectiv 6, iar centrul de greutate G al triunghiului are coordonatele $(-1, 0)$.

R. $A(2, 5)$, $B(6, 2)$, $C(-11, -7)$.

8. Se dau punctele distincte $M_1(\cos \alpha t, \sin \alpha t)$ și $M_2(\cos \beta t, \sin \beta t)$.

1) Să se calculeze $d(M_1, M_2)$.

2) Să se determine coordonatele mijlocului M al segmentului $[M_1 M_2]$ și să se calculeze $d(O, M)$.

3) Notînd cu M'_1 proiecția lui M_1 pe Ox , să se determine α și β astfel încît dreptele $M'_1 M$ să fie perpendiculare pe OM_1 pentru orice t .

$$\text{R. 1) } d(M_1, M_2) = 2 \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} t \right|, \quad 2) d(O, M) = \left| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} t \right|.$$

$$3) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} t - \cos \alpha t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta = 3\alpha.$$

9. Să se scrie ecuația dreptei ce conține punctul $A(4, -2)$ și este paralelă cu dreapta $d: 3x + y - 1 = 0$.

10. Să se traseze graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în următoarele cazuri:

1) $f(x) = \sqrt{4x^2}$,

2) $f(x) = 2\sqrt{(x-1)^2}$,

3) $f(x) = \sqrt{x + |x|}$,

4) $f(x) = 2 - |x - 2| - x$.

11. Se consideră crenelul din figura II. 42. Fixînd un reper cartezian adecvat, să se stabilească ecuația carteziană explicită a acestui crenel.

Același problemă pentru *dința de ferăstrău* din figura II. 43, pentru *scara* din figura II. 44 și pentru *cremaliera* din figura II. 45.

12. Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(-5, 4)$, $C(-3, -4)$, $D(2, -3)$. Fie $\{L\} = BA \cap CD$ și $\{M\} = AD \cap BC$.

1) Să se arate că dreapta LM este paralelă cu AC .

2) Să se arate că dreapta BD trece prin mijlocul lui $\{LM\}$.

Indicație. 1) $L\left(\frac{41}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{44}{3}\right)$. Dreptele LM și AC admit vectorul director $\vec{i} + \vec{j}$; 2) $BD: x + y + 1 = 0$.

13. Să se scrie ecuațiile mediatoarelor și ecuațiile înălțimilor triunghiului ale cărui vîrfuri sînt $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$, $C(2, -4)$.

Să se calculeze: 1) coordonatele centrului și raza cercului circumscris triunghiului ABC , 2) coordonatele ortocentrului triunghiului ABC .

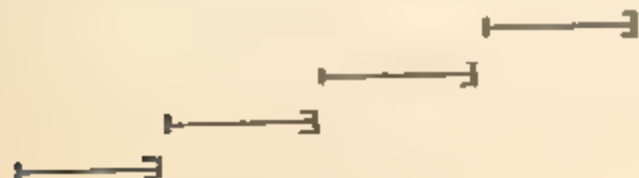


Fig. II. 44



Fig. II. 45

14. Suporturile laturilor $[AB]$ și $[AC]$ ale unui triunghi ABC au respectiv ecuațiile $4x + y - 8 = 0$, $4x + 5y - 24 = 0$ iar vîrfurile B și C sînt situate pe axa Ox .

Să se scrie ecuația mediane corespunzătoare vîrfului A .

$$\text{R. } 4x + 3y - 16 = 0.$$

15. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încît punctul de intersecție al dreptelor $d_1: y = 2x + 5$, $d_2: y = mx - 3$ să fie situat pe bisectoarea a doua a unghiului format de axele de coordonate.

$$\text{R. } m = -\frac{14}{5}.$$

16. Să se discute în raport cu parametrul $m \in \mathbb{R}$, poziția următoarelor două drepte: $d_1: mx + 2y = 8$, $d_2: x + (m - 1)y = 4$.

17. Se consideră treapia unitate $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$ și dreapta

$d_m: mx - y - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încît intersecția dintre graficul lui σ și d_m să fie nevidă.

Să se formuleze și să se rezolve o problemă asemănătoare utilizînd funcția modul $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Indicație. Se determină m astfel încît sistemul $y = mx - 1$, $y = \sigma(x)$ să admită soluție.

18. O dreaptă variabilă d , care trece prin punctul $A(0, 5)$ taie dreptele $d_1: x - 2 = 0$ și $d_2: x - 1 = 0$, respectiv în punctele B și C .

Să se arate că paralela dusă prin B la OC trece printr-un punct fix.

Indicație. $d: rx + s(y - 5) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Paralela dusă prin B la OC are ecuația $rx + s(y - 5x + 5) = 0$, $s \neq 0$. Coordonatele punctului fix sînt $(0, -5)$.

19. Să se demonstreze că dreapta variabilă $d_m: (m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 4)y - 3m + 2 = 0$ trece printr-un punct fix, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

Indicație. Se ordonează după puterile lui m și se identifică cu zero. Rezultă $A\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$.

20. O rază de lumină care trece prin punctul de coordonate $(2, 1)$ se reflectă pe dreapta $d: x - y + 2 = 0$ și apoi trece prin punctul $A(1, 1)$. Să se găsească ecuațiile parametrice ale razei incidente și ale celei reflectate.

21. Vîrfurile unui patrulater $ABCD$ sînt $A(4, 3)$, $B(5, -4)$, $C(-1, -3)$, $D(-3, -1)$.

1) Să se calculeze coordonatele punctelor E și F , unde $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = BC \cap AD$.

2) Figura $ABCFEF$ se numește *patrulater complet*.

Să se scrie ecuațiile diagonalelor AC , BD , EF și să se verifice că mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ sînt trei puncte coliniare.

3) Fie $\{M\} = AC \cap EF$, $\{N\} = BD \cap EF$. Să se verifice că punctele E , M , N , F formează o diviziune armonică.

22. Să se determine ecuațiile dreptelor ce trec prin punctul $A(1, 1)$ și sînt echidistante față de punctele $B(-1, 0)$ și $C(-1, -1)$.

Indicație. Ecuația fasciculului cu vîrf $A(1, 1)$ este $r(x - 1) + s(y - 1) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Se caută dreptele din acest fascicul care sînt echidistante față de B și C .

23. Raport în planul p la un reper cartezian și considerăm punctul $M(x, y)$ ale cărui coordonate satisfac relația

$$\frac{4x + 2y + 8}{3x + y + 1} = \frac{5}{2}.$$

1) Să se arate că punctul M aparține unei drepte fixe d .

2) Să se afle minimumul expresiei $x^2 + y^2$ când $M \in d = \{M_0(-1, -2)\}$.

$$\text{R. 1) } d: 7x - 9y - 11 = 0; \quad 2) \frac{121}{130}.$$

24. Să se găsească valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$ când $a, b \in \mathbb{R}$, iar ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

Indicație. Pentru x fixat ecuația reprezintă o dreaptă d în planul aOb . Distanța de la origine la punctul de coordonate (a, b) trebuie să fie egală cu distanța de la origine la dreapta d . Deci,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x^4 + 1}{\sqrt{(x^2 + a)^2 + (x^2)^2}}.$$

Într-o problemă pasă se reduce la aflarea minimumului global al funcției definită de pătratul expresiei din dreapta. Rezultă min $(a^2 + b^2) = \frac{4}{5}$.

25. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $M(4, 3)$ și care intersectează semiaxele pozitive Ox, Oy , în două puncte A, B astfel încât triunghiul dreptunghic AOB , să aibă aria egală cu 27.

Indicație. Se folosește ecuația fasciculului cu vârful $M(4, 3)$, adică $r(x - 4) + s(y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$.

26. Să se explicitizeze soluțiile în \mathbb{R}^2 pentru:

$$1) |x| + |y| - 2 > 0, \quad 2) 2 < |x + 1| + |y - 2| - 3 < 4$$

$$3) (x - y + 4)(2x - 3y + 6) > 0.$$

Indicație. Se consideră că (r, s) sunt coordonatele unui punct din plan și se utilizează împărțirea planului în regiuni.

27. Pe axa Ox se consideră punctele fixe A, B, C . Prin C se duce o dreaptă variabilă care înălținește prima bisectoare a axelor în M și axa Oy în N . Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AM și NB .

R. O dreaptă ce trece prin origine.

28. Se consideră reperul cartezian xOy , un punct fix $A(a, 0)$ pe Ox și un punct fix $B(0, a)$ pe Oy astfel încât $a > 0$. Un punct P se mișcă pe segmentul $[OB]$, iar un punct P' se mișcă pe semidreapta Bx astfel încât $\angle O_1 P = \angle O P' A = 0$, $0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP' .

R. Semidreapta paralelă și de același sens cu Oy de origine $D(a, a)$.

29. O funcție $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ se numește funcție lineară afină. Să se arate că restricția unei funcții linear afine la un segment $[AB]$ este sau o constantă sau își atinge extremele globale în extremitățile A și B .

Indicație. Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ atunci $[AB]: x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. Rezultă $\varphi(t) = f(x, y) = f(x_1, y_1) + t(f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1))$, $t \in [0, 1]$.

30. În cadrul unei C.A.P. sunt destinate 8 ha teren pentru a se cultiva două feluri de plante A și B . Investițiile necesare pe hectar sunt 2 000 lei respectiv 5 000 lei, iar câștigul net pe hectar este 3 000 lei respectiv 9 000 lei. C.A.P.-ul dispune de o sumă de 25 000 lei.

Pe câte hectare trebuie cultivate fiecare d.n aceste feluri de plante ca să se obțină un câștig maxim?

R. $x = 5$ ha, $y = 3$ ha, $\max f(x, y) = 33\,000$ lei.

81. O întreprindere de construcții trebuie să realizeze un complex de locuințe însumând 900 garsoniere 2 100 apartamente cu două camere și 1 400 apartamente cu trei camere. Se preconizează două tipuri de blocuri: primul tip cuprinde 40 de apartamente cu trei camere, 30 de apartamente cu două camere și 10 garsoniere și costă 4 milioane lei, iar al doilea tip este format din 20 de apartamente cu trei camere, 50 de apartamente de două camere și 30 de garsoniere, având costul de 5 milioane lei. Să se stabilească câte blocuri de fiecare fel trebuie construite astfel încât cheltuielile de construcție să fie minime.

R. 20 de blocuri de primul tip și 30 de blocuri de al doilea tip.

Capitolul III

GEOMETRIE

§ 1. Transformări geometrice

Fie p un plan. O funcție $\mathcal{F} : p \rightarrow p$ sau o restricție a unei asemenea funcții se numește *transformare geometrică*. Transformarea geometrică $\mathcal{F} : p \rightarrow p$ atașează fiecărui punct $M \in p$ un alt punct $M' \in p$ pe care îl notăm cu $\mathcal{F}(M)$, (fig. III. 1). Mulțimea tuturor punctelor $\mathcal{F}(M)$, $M \in p$, se numește *imaginea* lui \mathcal{F} și se notează cu $\mathcal{F}(p)$. Evident $\mathcal{F}(p) \subseteq p$. Un punct M_0 cu proprietatea $\mathcal{F}(M_0) = M_0$ se numește *punct fix* al funcției \mathcal{F} .

Transformarea geometrică \mathcal{F} se numește:

1) *injectivă*, dacă relațiile $\forall M_1, M_2 \in p, \mathcal{F}(M_1) = \mathcal{F}(M_2) \in p$ implică $M_1 = M_2$ (echivalent $\forall M_1, M_2 \in p, M_1 \neq M_2 \Rightarrow \mathcal{F}(M_1) \neq \mathcal{F}(M_2)$);

2) *surjectivă*, dacă $\forall M' \in p, \exists M \in p$ astfel încît $\mathcal{F}(M) = M'$ (echivalent $\mathcal{F}(p) = p$);

3) *bijectivă*, dacă este injectivă și surjectivă. Aceasta înseamnă că fiind dat un punct $M' \in p$ există un punct unic $M \in p$ astfel încît $\mathcal{F}(M) = M'$. Existența este asigurată de faptul că \mathcal{F} este surjectivă și unicitatea decurge din faptul că \mathcal{F} este injectivă.

Dacă $\mathcal{F} : p \rightarrow p$ și $\mathcal{G} : \mathcal{F}(p) \rightarrow p$ sînt două transformări geometrice atunci prin $M \rightarrow (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(M) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(M))$, $\forall M \in p$, definim *transformarea produs* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : p \rightarrow p$ (fig. III. 2). Produsul transformărilor este o operație asociativă, adică $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{H} = \mathcal{G} \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{H})$.

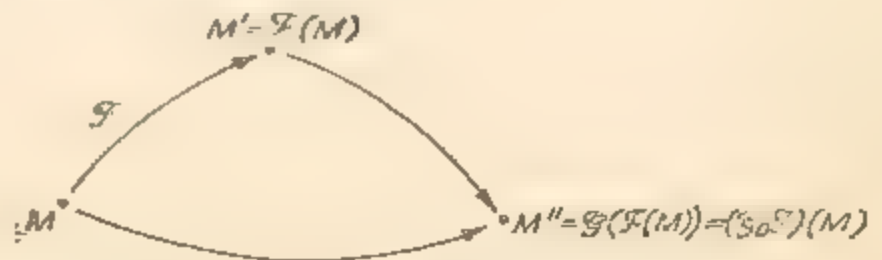
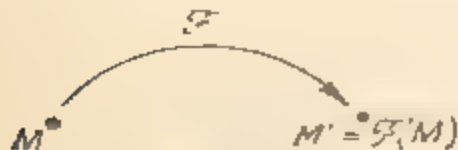




Fig. III. 3

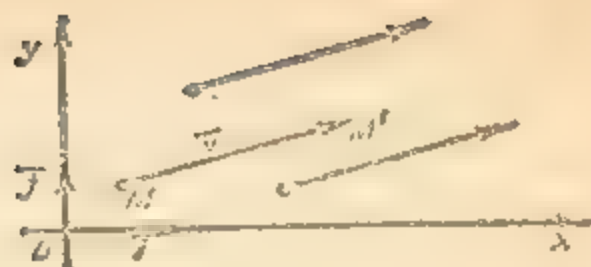


Fig. III. 4

Unui transformare geometrică bijectivă $f: p \rightarrow p$ i se poate ataşa transformarea geometrică (unică!) $Q: p \rightarrow p$ astfel încât $Q(M') = M, p$ cu proprietatea $f^{-1}(M) = M'$. Transformările geometrice f şi Q satisfac relaţiile $(Q \circ f)(M) = M, \forall M \in p, (f \circ Q)(M') = M', \forall M' \in p$. Pe scurt, $Q \circ f = f \circ Q = 1_p$, unde 1_p este identitatea pe p , adică transformarea geometrică caracterizată prin $1_p(M) = M, \forall M \in p$. Invers, dacă unei transformări geometrice $f: p \rightarrow p$ i se poate ataşa o transformare geometrică $Q: p \rightarrow p$ care să satisfacă relaţiile $Q \circ f = f \circ Q = 1_p$, atunci f este în mod necesar o bijecţie. Transformarea geometrică Q se numeşte *inversa* lui f şi de aici se notează cu f^{-1} (fig. III. 3).

Dacă $f: p \rightarrow p$ şi $Q: p \rightarrow p$ sînt transformări geometrice bijective, atunci $f \circ Q$ este tot bijectivă şi $(Q \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ Q^{-1})$. De asemenea, pentru orice bijecţie $f: p \rightarrow p$ se satisface $1_p \circ f = (f \circ 1_p) = f$.

§ 2. Translaţii

Fie planul p şi mulţimea vectorilor liberi V . Notăm cu M, M' două puncte din plan şi cu \vec{v} un vector liber fixat.

Definiţie. Transformarea geometrică $S: p \rightarrow p$ definită prin $M' = S(M), MM' = \vec{v}$ se numeşte *translaţie* de vector \vec{v} (fig. III. 4).

Definiţia este corectă deoarece fiecărui punct $M' \in p$ i se asociază un punct şi numai unul singur $M \in p$ determinat de faptul că segmentul orientat $\overline{MM'}$ trebuie să fie reprezentantul vectorului \vec{v} . În particular translaţia de vector $\vec{0}$ este identitatea 1_p .

Evident, dacă se dau punctul A şi imaginea sa A' , atunci există o singură translaţie care duce pe A în A' şi anume translaţia de vector $\overline{AA'}$.

Teoremă. 1) Dacă S_1 este translaţia de vector \vec{v}_1 şi S_2 este translaţia de vector \vec{v}_2 , atunci produsul $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$ este translaţia de vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

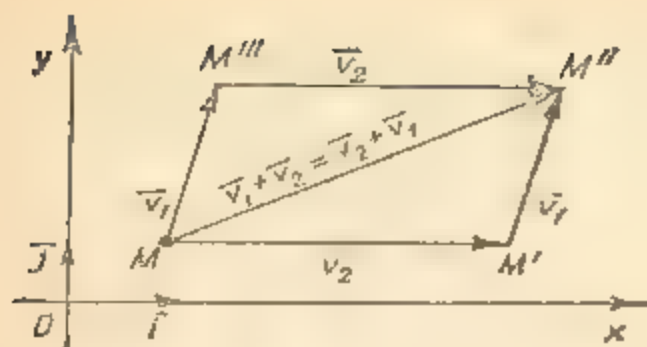


Fig. III. 5

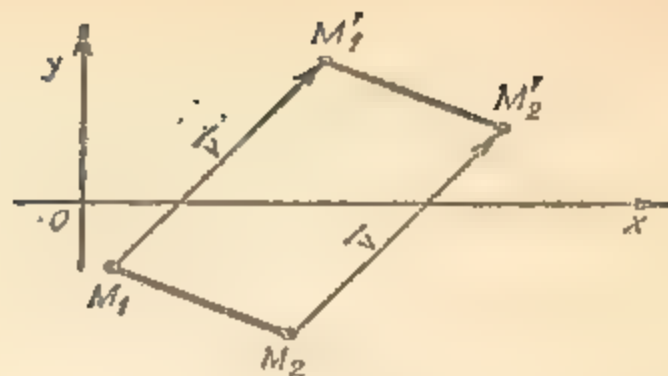


Fig. III. 6

2) Dacă \mathcal{T} este translația de vector \vec{v} , atunci \mathcal{T}^{-1} există și este translația de vector $-\vec{v}$.

Demonstrație. 1) Fie \mathcal{T}_1 translația de vector \vec{v}_1 , adică $M''' = \mathcal{T}_1(M)$, $\overline{MM''} = \vec{v}_1$ și \mathcal{T}_2 translația de vector \vec{v}_2 , adică $M'' = \mathcal{T}_2(M''')$, $\overline{M'''M''} = \vec{v}_2$ (Fig. III. 5). Produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ este translația de vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, adică $M'' = (\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(M)$, $\overline{MM''} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Analog $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația de vector $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ și deci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) Teoremă

Teorema precedență conține elemente suficiente pentru a afirma că mulțimea tuturor translațiilor planului p este un grup comutativ în raport cu operația produs (*grupul translațiilor*).

Reportăm planul p la reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Presupunem că punctul M are coordonatele (x, y) , punctul M' are coordonatele (x', y') , iar $\vec{v} = h\vec{i} + k\vec{j}$.

Teoremă. Translația \mathcal{T} de vector $\vec{v} = h\vec{i} + k\vec{j}$ este caracterizată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Demonstrație. Relația de definiție $\overline{MM'} = \vec{v}$ este echivalentă cu $(x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = h\vec{i} + k\vec{j}$. Rezultă $x' - x = h$, $y' - y = k$, adică $x' = x + h$, $y' = y + k$.

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra ușor proprietatea unei translații de a păstra distanța dintre puncte (Fig. III. 6). Într-adevăr, dacă prin translația \mathcal{T} de vector $\vec{v} = h\vec{i} + k\vec{j}$ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, au noulă imagine $M'_i(x'_i, y'_i)$, $x'_i = x_i + h$, $y'_i = y_i + k$, $i = 1, 2$, atunci

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 + h - x_1 - h)^2 + (y_2 + k - y_1 - k)^2} \\ &= d(M'_1, M'_2) \end{aligned}$$



Fig. III. 7

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie segmentul $[AB]$ și cercul C de centru O și rază r . Fiecărui punct M de pe cercul C i se atașează punctul M' astfel încât $ABMM'$ să fie un paralelogram. Să se găsească mulțimea punctelor M' .

Soluție. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $MM' = BA$

(fig. III. 7). Punctul M' este transformatul lui M prin translația de vector BA . De aceea, atunci când M descrie pe C , punctul M' descrie un cerc cu centrul O' , $OO' = \overline{BA}$, de rază r .

2. Fie segmentul $[AB]$ și două drepte concurente d și d' . Să se determine punctul M pe d și punctul M' pe d' astfel încât $ABMM'$ să fie un paralelogram.

Soluție. Fie d'' imaginea lui d prin translația de vector BA și $\{M'\} = d' \cap d''$. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $MM' = AB$, adică M este imaginea lui M' prin translația de vector \overline{BA} (fig. III. 8).

3. Se dă triunghiul de vîrfuri $A(3,2)$, $B(1,5)$, $C(-2,-1)$ și translația \mathcal{S} determinată de punctele $O(0,0)$ și $O'(1,2)$. Să se găsească $A' = \mathcal{S}(A)$, $B' = \mathcal{S}(B)$, $C' = \mathcal{S}(C)$, $\mathcal{S}(AB)$, $\mathcal{S}(AC)$, $\mathcal{S}(BC)$ și să se verifice că $\mathcal{S}(AB) = A'B'$, $\mathcal{S}(AC) = A'C'$, $\mathcal{S}(BC) = B'C'$.

Soluție. (fig. III. 9) Translația \mathcal{S} este determinată de vectorul $\overline{OO'}$ și $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Astfel ea are ecuațiile $x' = x + 1$, $y' = y + 2$.

Punând $x = 3$, $y = 2$ găsim $x' = 4$, $y' = 4$ și deci $A'(4, 4)$. Analog $B'(2, 7)$, $C'(-1, 1)$.

Se observă că $AB: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{3}$ și $A'B': \frac{x'-4}{-2} = \frac{y'-4}{3}$. Pe de altă parte

$\mathcal{S}(AB): \frac{(x'-1)-3}{-2} = \frac{(y'-2)-2}{3}$ și deci $\mathcal{S}(AB) = A'B'$. Analog se verifică și celelalte relații.

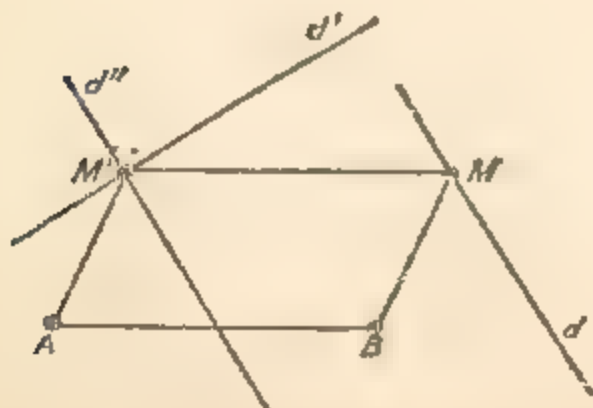


Fig. III. 8

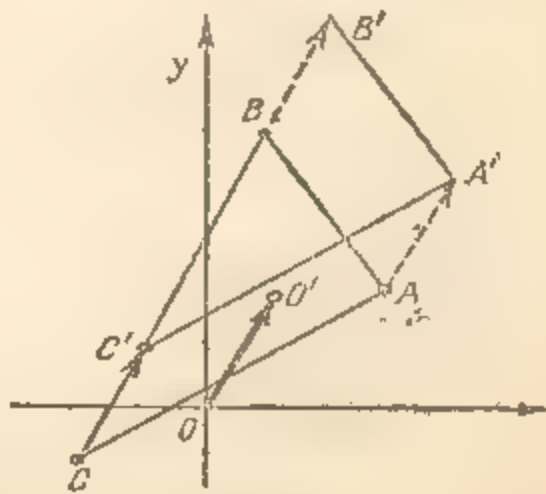


Fig. III. 9

§ 3. rotații

Fie planul p raportat la reperul cartezian xOy , plan orientat prin fixarea sensului de rotație trigonometric drept sens pozitiv. Sensul mișcării acelor de ceasornic este sensul negativ. Admitem cunoscute noțiunile de unghi orientat și de măsură algebrică a unui asemenea unghi.

Definiție. Fie θ o măsură algebrică de unghi orientat fixat. Transformarea geometrică $\mathcal{R}: p \rightarrow p$ definită prin $\mathcal{R}(O) = O$ și pentru $M \neq O$, $\mathcal{R}(M) = M'$ astfel încât $d(O, M) = d(O, M')$, $\angle MOM' = \theta$ se numește rotație de centru O și unghi θ (fig. III. 10).

Rotația este bine definită deoarece fiecărui punct $M \in p$ i se atașează un punct și numai unul $M' \in p$ determinat de condițiile date în definiție. Originea reperului cartezian este singurul punct cu proprietatea $\mathcal{R}(O) = O$, adică este singurul punct fix.

Presupunem că M are coordonatele (x, y) și M' are coordonatele (x', y') .

Teoremă. Rotația \mathcal{R} de centru $O(0,0)$ și unghi θ este caracterizată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq \pm \infty. \end{cases}$$

Demonstrație. Urmărind figura III. 10, cazul $\theta > 0$, avem $x' = \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$. Dar $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$. Deci $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$. Analog, $y' = \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$, adică $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$.

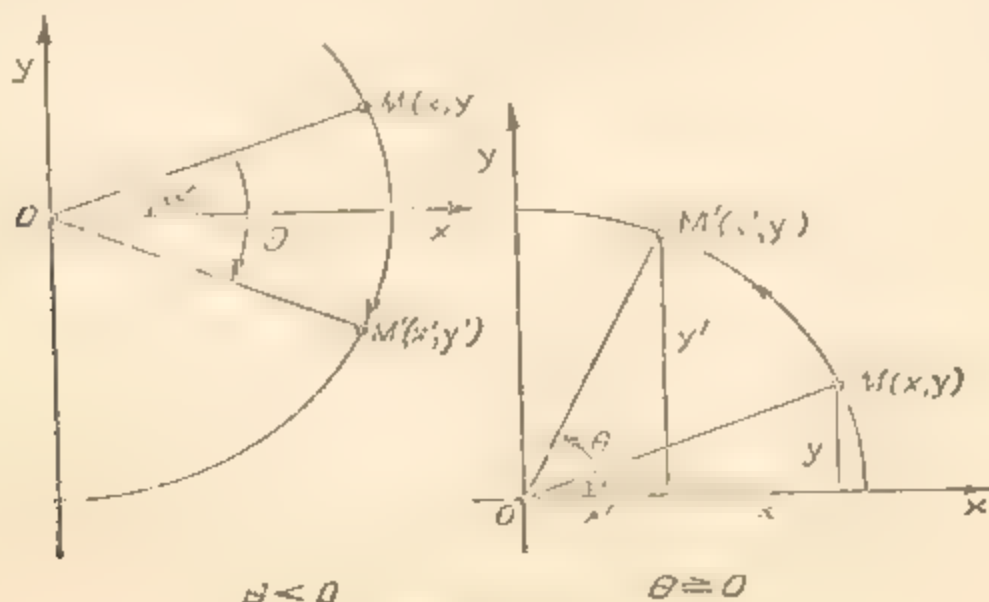


Fig. III. 10

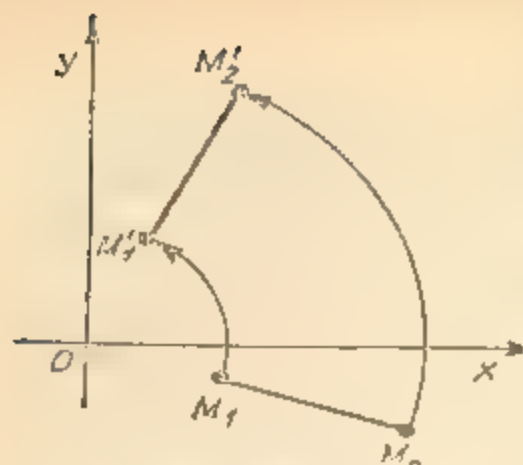


Fig. III. 11

Teoremă. 1) Dacă R_1 și R_2 sînt rotații de centru O și unghiuri θ_1 respectiv θ_2 , atunci $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ este rotația de centru O și unghi $\theta_1 + \theta_2$.

2) Dacă R este rotația de centru O și unghi θ , atunci R^{-1} există și este rotația de centru O și unghi $-\theta$.

Demonstrație. 1) Te m ă.

2) Rotația R de centru $O(0, 0)$ și unghi θ este caracterizată prin sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq \text{fixat.} \end{cases}$$

Pe o punct $M'(x', y')$ dat și rezolvînd sistemul precedent în raport cu (x, y) găsim soluția unică

$$\begin{cases} x = x' \cos(-\theta) - y' \sin(-\theta), \\ y = x' \sin(-\theta) + y' \cos(-\theta). \end{cases}$$

Acste ecuații caracterizează o rotație R^{-1} de centru $O(0, 0)$ și unghi $-\theta$ cu proprietatea $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = 1_p$. De aceea R este bijectivă și $R^{-1} = R^{-1}$.

De aceea și teoremele precedente arată că mulțimea tuturor rotațiilor de centru O din planul p este un grup comutativ în raport cu operația \circ (grupul rotațiilor).

Să arătăm că rotațiile au proprietatea de a păstra distanța dintre puncte (Fig. III. 11). Într-adevăr, dacă prin rotația R de centru O și unghi θ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, au imaginile $M_i'(x_i', y_i')$, $x_i' = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta$, $y_i' = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta$, $i = 1, 2$, atunci

$$\begin{aligned} d(M_1', M_2') &= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \\ &= \sqrt{[(x_2 - x_1) \cos \theta - (y_2 - y_1) \sin \theta]^2 + [(x_2 - x_1) \sin \theta + (y_2 - y_1) \cos \theta]^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= d(M_1, M_2). \end{aligned}$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC , în exterior se construiesc triunghiurile ABD și ACE astfel încît $\angle DAC = \angle DAB = 60^\circ$ și $\angle BDA = \angle CEA$. Să se arate că mediana din A a triunghiului ABC este înălțimea în triunghiul DAE .

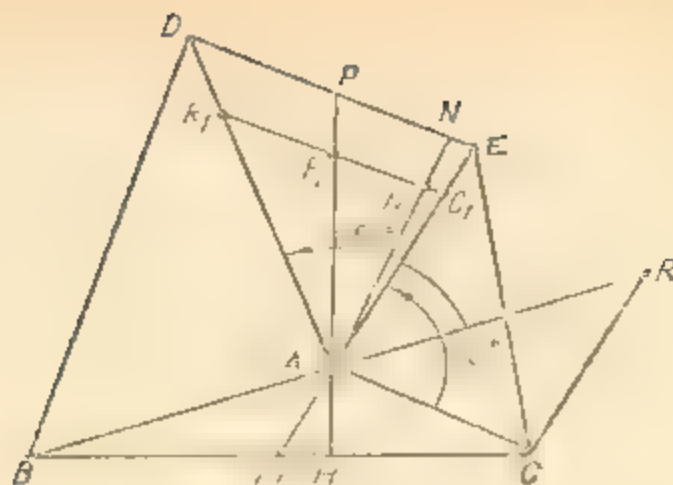


Fig. III. 12

Soluție (Fig. III. 12) $\Gamma \equiv AH \perp BC, \angle AMB \equiv \angle MCN, AH \cap DE = \{P\}, AM \cap DE = \{N\}$. Prolungăm pe $[BA]$ cu un segment $AR_1 \equiv [BA]$, atunci AM este linie mijlocie în triunghiul ARC , adică $AM \parallel AC$ și $d(A, M) = \frac{1}{2} d(R, C)$.

Făcăm o rot. Γ de 90° , cu centrul în A , a triunghiului ARC ; AR devine AR_1 , AC devine AC_1 și RC devine R_1C_1 . Dar $ABD \sim ACD$,

$$\text{deci } \frac{d(A, C)}{d(A, B)} = \frac{d(A, P)}{d(A, D)} \text{ sau } \frac{d(A, C_1)}{d(A, R_1)} = \frac{d(A, E)}{d(A, D)}.$$

Rezultă $R_1C_1 \parallel DE$ și cum $AC_1 \perp DE$, $AM \parallel AC$, găsim $AM \perp DE$.

2. 1) Se da triunghiul echilateral de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, -1)$,

$$C\left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Să se determine imaginea sa prin rotația R de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

2) Se da patrulater de vârfuri $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$. Să se determine imaginea sa prin rotația R de centru A și unghi $\frac{\pi}{4}$.

Soluție. 1) Rotația de centru O și unghi $\pi/3$ este caracterizată prin

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Făcând $x = 1$, $y = 2$, găsim $x' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. Astfel imaginea lui A prin

este punctul $A'\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$. Analog,

$$B'\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{8\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right), C'((\sqrt{3} - 1)/2, (5 + 3\sqrt{3})/2).$$

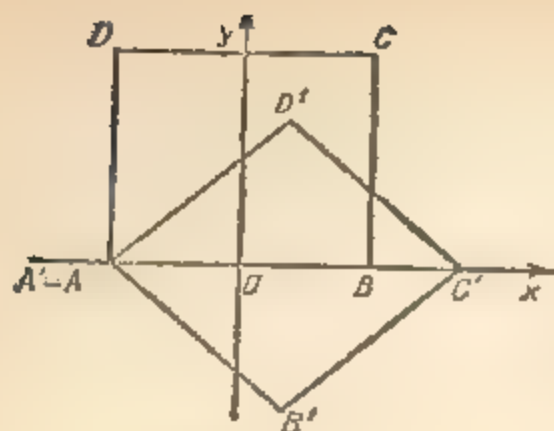


Fig. III. 13

2 (fig. III. 13). Rotația \mathcal{R} de centru $A(-1, 0)$ și unghi $-\pi/4$ este caracterizată prin (de ce?)

$$\begin{cases} x' + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} y, \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2} (x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} y. \end{cases}$$

Evident lui $A(-1, 0)$ îi corespunde punctul $A'(-1, 0)$. Punctului $B(1, 0)$ îi corespunde

$$B'(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2}).$$

Analog,

$$C'(2\sqrt{2} - 1, 0), \quad D'(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}).$$

§ 4. Izometrii

Fie planul p raportat la reperul cartezian xOy . Rotația de centru O și unghi θ este descrisă de sistemul liniar

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

De aceea rotației \mathcal{R} i se poate asocia matricea

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Matricea R are proprietatea ${}^tRR = I$, unde I este matricea unitate de ordinul doi. Astfel R este ceea ce se cheamă o *matrice ortogonală* de ordinul doi.

Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o *matrice ortogonală* cu elemente reale, adică o matrice care satisface relația ${}^tAA = I$. Ținând seama că determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinantelor și că determinantul unei matrice este egal cu determinantul transpusei, deducem $\det({}^tAA) = \det I = 1 \Rightarrow (\det({}^tA))(\det A) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$. Astfel matricea ortogonală A este nesingulară, adică admite inversa A^{-1} . Dacă înmulțim relația ${}^tAA = I$ la dreapta cu A^{-1} rezultă ${}^tA = A^{-1}$. Din această egalitate, prin înmulțire la stnga cu A , rezultă $A{}^tA = I$.

Inversa unei matrice ortogonale este o matrice ortogonală. Într-adevăr ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = I$. Analog se arată că dacă A și B sînt matrice ortogonale (de ordinul doi), atunci și matricea produs AB este ortogonală.

Teoremă. 1) Orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul $+1$ se poate scrie în forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

2) Orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul -1 se poate scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Demonstrație. 1) Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală de ordinul doi.

Problema se reduce la a rezolva sistemul

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1, ad - bc = 1.$$

Se observă că dacă punem $a = \cos \theta, c = \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}$, atunci prima ecuație este identic satisfăcută. Analog, ecuația a treia admite familia de soluții $b = -\cos \varphi, d = \sin \varphi, \varphi \in \mathbb{R}$. Se impune ca acestea să verifice ecuația a doua și ecuația a patra, adică

$$\cos(\theta - \varphi) = 0, \sin(\theta - \varphi) = -1.$$

Rezultă $\varphi = \theta - \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$ și deci $b = -\sin \theta, d = \cos \theta$.

2) Te m ă.

Observațiile precedente sugerează introducerea transformărilor geometrice determinate analitic de o matrice ortogonală, transformări care conțin rotațiile de centru O ca un caz particular.

Definiție. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală.

Transformarea geometrică care asociază punctului $M(x, y)$ punctul $M'(x', y')$ definit prin

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

se numește transformare ortogonală.

Avind în vedere observațiile făcute pentru matricele ortogonale de ordinul doi rezultă:

1) orice transformare ortogonală admite o inversă care este tot transformare ortogonală,

2) *produsul a două transformări ortogonale este o transformare ortogonală,*

3) *dacă $\det A = +1$, atunci transformarea ortogonală corespunzătoare este o rotație de centru O ,*

4) *dacă $\det A = -1$, atunci transformarea ortogonală corespunzătoare este o rotație de centru O și o simetrie de axă Ox sau Oy .*

Aceste observații arată printre altele că mulțimea tuturor transformărilor ortogonale ale planului p este un grup în raport cu operația produs (*grupul transformărilor ortogonale*).

Ca și în cazul rotației un calcul analitic simplu arată că o transformare ortogonală păstrează distanța dintre puncte.

Pornind de la modelul transformărilor ortogonale și al translațiilor introducem transformările geometrice care poartă numele de *izometrii*.

Definiție. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală și (h, k) o pereche de numere reale. Transformarea geometrică care asociază punctului $M(x, y)$ punctul $M'(x', y')$ definit prin

$$\begin{cases} x' = ax + by + h, \\ y' = cx + dy + k \end{cases}$$

se numește izometrie.

Alternativ izometria este produsul dintre o transformare ortogonală dată matricea ortogonală A de vector (h, k) și o translație dată de vectorul (h, k) . Dacă $\det A = +1$ izometria se numește *rotăție plusare* (rotăție, simetrie și translație).

Dacă reperele carteziene $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ și $\{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$ sunt în poziții relative generale, atunci există o simetrie izometrie $\mathcal{D}: p \rightarrow p'$ în care $\mathcal{D}(O) = O'$, $\mathcal{D}(A) = A'$, $\mathcal{D}(B) = B'$. Acum, în mod natural se poate defini și o izometrie care păstrează liniile similare de expresie canonică ale matricelor ortogonale de arbitraritate.

De asemenea se constată că orice izometrie este bijectivă, inversa fiind tot o izometrie, iar produsul a două izometrii este tot o izometrie. Astfel izometriile formează grup în raport cu operația produs (*grupul izometriilor*).

Teoremă. 1) *Izometriile păstrează distanța dintre puncte.*

2) *Izometriile păstrează dreptele.*

Demonstrație. 1) Orice izometrie \mathcal{I} se scrie în forma $\mathcal{I} = \mathcal{S} \circ \mathcal{G}$ unde \mathcal{S} este o translație și \mathcal{G} o transformare ortogonală. Rezultă $d(\mathcal{I}(M), \mathcal{I}(N)) = d(\mathcal{S}(\mathcal{G}(M)), \mathcal{S}(\mathcal{G}(N))) = d(\mathcal{G}(M), \mathcal{G}(N)) = d(M, N)$, $\forall M, N \in p$ (fig. III. 14).

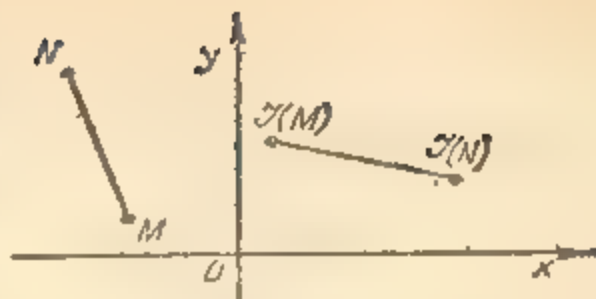


Fig. III. 14

Notă. Se poate arăta că orice transformare geometrică a lui p care păstrează distanța dintre puncte este o izometrie.

2) Fie dreapta $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și izometria de ecuații $x' = ax + by + h$, $y' = cx + dy + k$. Pentru simplificarea raționamentelor presupunem $ad - bc = 1$. Deoarece

$$x = \begin{vmatrix} x' - h & b \\ y' - k & d \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a & x' - h \\ c & y' - k \end{vmatrix}$$

imaginea $\mathcal{I}(d_1)$ are ecuația

$$a_1 \begin{vmatrix} x' - h & b \\ y' - k & d \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a & x' - h \\ c & y' - k \end{vmatrix} + c_1 = 0.$$

Aceasta este o ecuație de gradul întâi în x' și y' pentru care $(a_1d - b_1c)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 = a_1^2(b^2 + d^2) + b_1^2(a^2 + c^2) - 2a_1b_1(ad - bc) = a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, adică coeficienții lui x' , y' nu se anulează simultan. Astfel teorema este justificată.

Izometriile păstrează distanța și dreptele. Decile păstrează toate noțiunile definite cu ajutorul distanței și dreptelor.

Consecință. Izometriile păstrează relația „între”, segmentele, semidreptele, unghiurile, triunghiurile și congruența acestor entități.

Definiție. Două submulțimi, X, Y de puncte din plan se numesc congruente dacă există o izometrie $\mathcal{I}: p \rightarrow p$ astfel încât $\mathcal{I}(X) = Y$ (fig. III. 15, a – translație, b – rotație, c – simetrie).

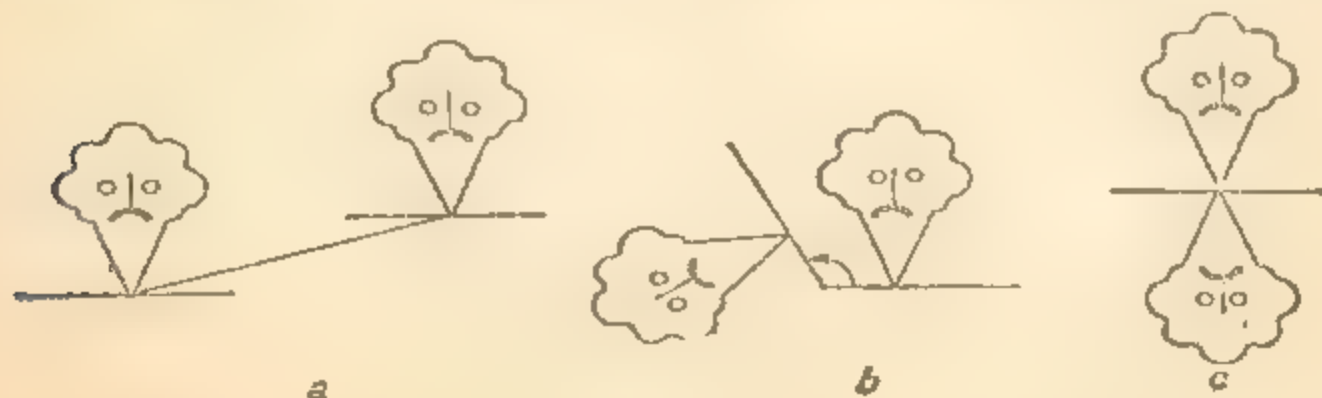


Fig. III. 15

Congruența este o relație de echivalență pe mulțimea submulțimilor (figurilor) planului p . Submulțimile (figurile) din aceeași clasă de echivalență poartă aceeași denumire.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctele

$$A \left(\frac{a^3 - 1}{a^3 - 2a + 1}, \frac{a^4 + 2a^3 + a^2}{a^4 - a^3} \right), \quad B \left(1, \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a} \right), \quad C \left(-1, \frac{a}{3a-1} + \frac{1}{1-3a} \right),$$

$$D \left(\frac{a+1}{a-1}, \frac{a+1}{a-1} \right), \quad E(1, 1), \quad F \left(-1, \frac{a}{3a-1} + \frac{1}{1-3a} \right),$$

unde a este un parametru real. Să se determine condițiile de existență simultană a triunghiurilor ABC , DEF și să se verifice că în aceste condiții $AB'C' = DEF$.

Soluție Existența expresiilor raționale impune $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{3}$. În aceste condiții se observă că $A = D$, $B = E$ și $C = F$, având respectiv coordonatele $\left(\frac{a+1}{a-1}, \frac{a+1}{a-1} \right)$, $(1, 1)$, $\left(-1, \frac{a}{3a-1} + \frac{1}{1-3a} \right)$. Impunem și condiția ca A, B, C să nu fie coliniare

$$\begin{vmatrix} \frac{a+1}{a-1} & \frac{a+1}{a-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{a}{3a-1} + \frac{1}{1-3a} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Rezultă $a \neq \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$.

2. Să se verifice că triunghiurile MNL și $M'N'L'$ de vârfuri $M(7, 1)$, $N(7, 4)$, $L(3, 1)$, $M'(-2.5, 16.5)$, $N'(2, 4)$, $L'(2, 0)$ sunt congruente și să se determine izometria Q cu proprietatea $Q(MNL) = M'N'L'$.

Soluție (fig. III. 16) Triunghiurile dreptunghice MNL și $M'N'L'$ sunt congruente deoarece că laturile sunt egale (de lungimi respective egale). Urmărind orientarea (indicații de săgeți) deducem că $M'N'L'$ se obține din MNL printr-o antideplasare, adică o izometrie de tipul

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + h, \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta + k. \end{cases}$$

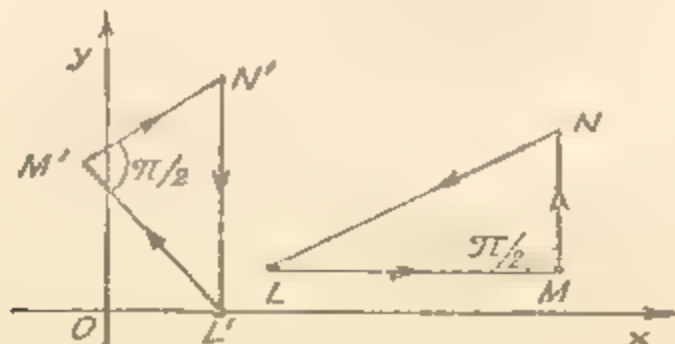


Fig. III. 16

coeficienții $\cos \theta$, $\sin \theta$, h și k sint determinați de sistemul

$$\begin{cases} -\frac{2}{5} = 7 \cos \theta + \sin \theta + h, \\ \frac{16}{5} = 7 \sin \theta - \cos \theta + k, \\ 2 = 7 \cos \theta + 4 \sin \theta + h, \\ 5 = 7 \sin \theta - 4 \cos \theta + k, \\ 2 = 3 \cos \theta + \sin \theta + h, \\ 0 = 3 \sin \theta - \cos \theta + k. \end{cases}$$

Rezultă $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $h = 3$, $k = -3$.

§ 5. Probleme propuse

1. Triunghiul $A'B'C'$ este obținut din triunghiul ABC printr-o translație. Să se arate că medianele din puncte corespunzătoare ale celor două triunghiuri sint paralele sau coliniare.
Indicație. Imaginea unei drepte d printr-o translație este o dreaptă paralelă sau egală cu d .

2. Fie cercurile C_1 , C_2 și segmentul $[AB]$. Să se construiască un segment paralel și congruent cu $[AB]$ ale cărui extremități să fie respective pe cercurile C_1 și C_2 . Discuție

Indicație. Se utilizează translația \mathcal{T} de vector \vec{AB} .

3. În plan \mathcal{A} raportat la reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1, 2)$.

1) Să se determine ecuațiile translației \mathcal{T} de vector \vec{OA} .

2) Care este imaginea dreptei $d: x + y + 1 = 0$ prin \mathcal{T} .

3) Să se găsească dreapta h cu proprietatea $\mathcal{T}(h): 2x' - 3y' + 1 = 0$.

4. Fie h , k , l trei drepte paralele. Să se construiască un triunghi echilateral ABC ale cărui vîrfuri să fie situate pe cele trei drepte.

Indicație. Se fixează punctul A pe una din drepte și se utilizează rotația de centru A și unghi 60° sau -60° . Rezultă două soluții.

5. Să se inscrie un pătrat într-un paralelogram.

Indicație. Dacă există un pătrat înscris într-un paralelogram atunci centrul O al paralelogramului coincide cu centrul pătratului. Se utilizează rotația de centru O și unghi $\frac{\pi}{2}$.

6. Se consideră rotația \mathcal{R} de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

1) Care este imaginea dreptei $d: x - y + 1 = 0$ prin \mathcal{R} ?

2) Să se determine dreapta h cu proprietatea $\mathcal{R}(h): x - 4y + 1 = 0$.

7. Să se determine punctele fixe ale rotației de centru O și unghi θ .

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + 1, \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta + 1 \end{cases}$$

Indicație. Se pune $x' = x$, $y' = y$ și se rezolvă sistemul linear, obținut.

8. 1) $S = S \circ A$, unde S este translația de vector $v = i - j$, iar A este rotația de matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Se dă $A(3, 2)$. Să se găsească $S(A)$, $S^{-1}(A)$, $(A \circ S)(A)$.

Indicație. $S \circ A$ are ecuațiile: $x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1$, $y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1$, iar $A \circ S$ are ecuațiile: $x'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{y-1}{\sqrt{2}}$, $y'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}}$.

9. Axele de coordonate Ox și Oy se rotesc cu unghiul $\frac{\pi}{3}$ și noul reper $x'Oy'$ se consideră cu inversă orientare față de xOy . Știind că un punct A are coordonatele $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ în reperul $x'Oy'$, să se găsească coordonatele lui A față de reperul xOy .

Soluție. Rotirea de unghi θ , a reperului cartezian xOy , este caracterizată prin $x = x'$, $\cos \theta = y'$ sau θ , $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ unde $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Problema impune rotația reperului $x'Oy'$ cu θ de sens mic în raport cu Oy' sau în raport cu Ox' . Obținem

$$\left(i - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) \text{ sau } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3, \sqrt{3} + \frac{3}{2} \right).$$

Capitolul IV

CONICE

§ 1. Cercul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ reperul cartezian în plan și $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ două puncte. Reamintim expresia distanței

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat și r un număr real strict pozitiv fixat. *Cercul* C de centru M_0 și rază r este mulțimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $d(M_0, M) = r$ (fig. IV. 1).

Teorema 3. *Punctul $M(x, y)$ aparține cercului C de centru $M_0(x_0, y_0)$ și rază r dacă și numai dacă*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Demonstrație. $M \in C \Leftrightarrow d(M_0, M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Astfel $C = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ adică $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. Dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se poate întotdeauna scrie $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ sau $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ sau $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$. Acest lucru, care se poate demonstra ușor, este în mod evident adevărat în \mathbb{R}^n (fig. IV. 2),

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, t \in [0, 2\pi), t = \text{parametru}, \end{cases}$$

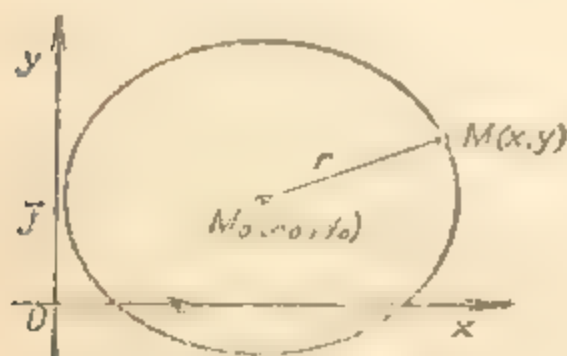


Fig. IV. 1

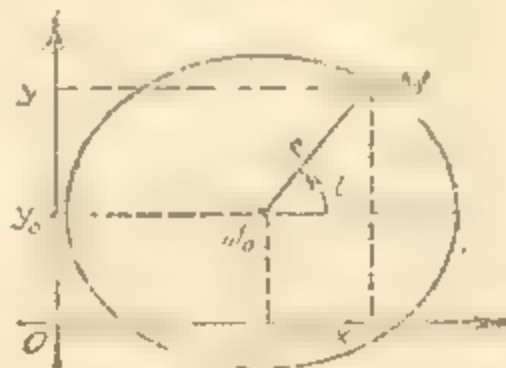


Fig. IV. 2

sau cu o ecuație

$$F = F_0 + r(\cos t \hat{i} + \sin t \hat{j}), \quad t \in [0, 2\pi)$$

în V numită *ecuația vectorială a cercului*.

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x și y , termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulțimea

$$\Gamma: x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Deoarece ecuația lui Γ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

rezultă:

- 1) dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $x_0 = -a$, $y_0 = -b$ și de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;
- 2) dacă $a^2 + b^2 - c = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a, -b)\}$;
- 3) dacă $a^2 + b^2 - c < 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$.

Ecuația

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad a^2 + b^2 - c > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

se numește *ecuația carteziană generală a cercului*. Evident această ecuație este echivalentă cu

$$d(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0, \quad d \neq 0, \quad a_1^2 + b_1^2 - dc_1 > 0.$$

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$, unde (x_0, y_0) este un punct fixat, iar $r > 0$ este tot fixat. Definim mulțimile (fig. IV. 3) $\text{int}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $C = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$. Evident $\text{int}(C) \cap \text{ext}(C) = \emptyset$, $\text{int}(C) \cup C \cup \text{ext}(C) = p$.

Deci un cerc C din plan are proprietatea că separă planul în două submulțiri disjuncte: *interiorul* lui C notat $\text{int}(C)$ și *exteriorul* lui C notat $\text{ext}(C)$.

Teoremă. 1) Mulțimile $\text{int}(C)$ și $\text{int}(C) \cup C$ sînt convexe.

2) $\forall M_1 \in \text{int}(C)$, $\forall M_2 \in \text{ext}(C)$, segmentul $[M_1 M_2]$ trece pe C .

Demonstrație. Pentru a se demonstra generalitatea putem presupune $x_0 = y_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, două puncte din plan. Segmentul $[M_1 M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$.

Dacă $M_1, M_2 \in \text{int}(C)$, adică $f(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1, 2$, atunci

$$f(x, y) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) =$$

$$((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2 =$$

$$(1 - t)^2 x_1^2 + 2(1 - t)tx_1x_2 + t^2 x_2^2 +$$

$$+ (1 - t)^2 y_1^2 + 2(1 - t)ty_1y_2 + t^2 y_2^2 - r^2 \leq$$

$$\leq (1 - t)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + t(x_2^2 + y_2^2 - r^2) =$$

$$(1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2) < 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$


Fig. IV. 3

* r^2 se măsoară cu t , coeficientul său fiind pozitiv.

Cu alte cuvinte $[M_1 M_2] \subset \text{int}(C)$.

2) Fie $M_1 \in \text{int}(C)$, adică $f(x_1, y_1) < 0$ și $M_2 \in \text{ext}(C)$, adică $f(x_2, y_2) > 0$. Rezultă funcția continuă $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 - r^2$,
cu proprietățile $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ și $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$. De aceea există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $0 = \varphi(t_0) = ((1-t_0)x_1 + t_0x_2)^2 + ((1-t_0)y_1 + t_0y_2)^2 - r^2$ și deci $M_0((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2) \in C$.

Fie cercul $C: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ și $M_1(x_1, y_1) \in C$. Dreapta determinată de punctul M_1 și de vectorul normal $M_0M_1 = (x_1-x_0)\vec{i} + (y_1-y_0)\vec{j}$ este tangentă (fig. IV.4) la cerc în punctul M_1 . Ecuația carteziană implicită a acestei drepte este

$$(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$$

sau echivalent

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

(dedublata ecuației cercului în punctul $M_1(x_1, y_1)$). Dreapta determinată de punctul M_1 și de vectorul director M_0M_1 este normală (fig. IV.4) la cerc în punctul M_1 . Ecuația normalei este

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0}.$$

Observație. Prin dedublări înțelegem substituiri $x^2 \rightarrow xx_1, y^2 \rightarrow yy_1, xy \rightarrow \frac{1}{2}(xy_1 + x_1y), x \rightarrow \frac{1}{2}(x + x_1), y \rightarrow \frac{1}{2}(y + y_1)$. Prin dedublata ecuației de grad doi $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$ în punctul $M_1(x_1, y_1)$ întărim ecuația de gradul întâi $a_{11}x_1x + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{10}(x + x_1) + a_{02}(y + y_1) + a_{00} = 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se găsească ecuația carteziană a cercului cu centru în $M_0(1, 1)$ și tangent dreptei $d: 3x + 4y + 8 = 0$. Apoi să se scrie ecuațiile parametrice și ecuația vectorială ale aceluiași cerc.

Soluție. Notăm cu C cercul a cărui ecuație se caută. Raza r a acestui cerc este distanța de la M_0 la dreapta d . Deci,

$$r = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3. \text{ Astfel } C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2.$$

Ecuația carteziană găsită este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 + 3 \cos t, y = 1 + 3 \sin t, t \in [0, 2\pi)$, din care se obține ecuația vectorială $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + 3(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}), t \in [0, 2\pi)$.

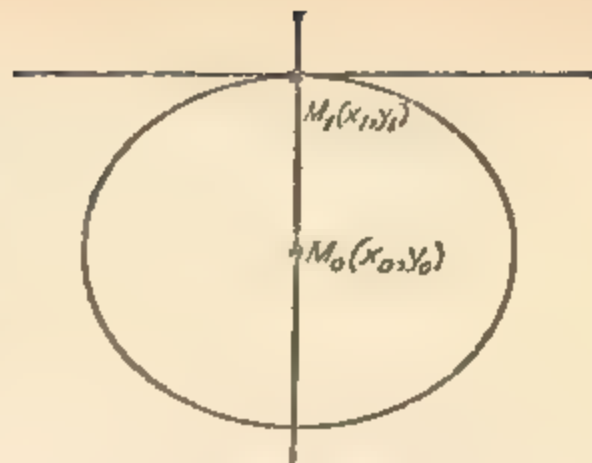


Fig. IV.4

2. 1) Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ reprezintă un cerc C , punându-se în evidență centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r .

2) Să se scrie ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$.

3) Să se găsească ecuațiile carteziane ale tangentelor duse prin $D(8, 7)$ la cercul C .

Soluție. 1) Ecuația dată se transformă $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ și deci ea reprezintă un cerc cu centrul în $M_0(3, 2)$ și de rază $r = \sqrt{5}$.

2) Punctul A aparține lui C , adică coordonatele sale verifică ecuația lui C . Ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$ se poate scrie utilizând deducerea ecuației $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = r^2$. Înlocuim $(x_1, y_1) = (2, 0)$, $(x_2, y_2) = (x, y)$, $(x_0, y_0) = (3, 2)$ și $r^2 = 5$. Rezultă $-(x - 3) - 2(y - 2) = 5$ sau $x + 2y - 2 = 0$.

3) Fasciculul de drepte cu vârful $D(8, 7)$ are ecuația $t(x - 8) + s(y - 7) = 0$, $r^2 + t^2 + s^2 \neq 0$. Să scriem că un astfel de drept este tangent la cercul C la distanța $r = \sqrt{5}$ față de centrul $M_0(3, 2)$. Pentru aceasta se impune condiția

$$\sqrt{5} = \frac{|r(3 - 8) + s(2 - 7)|}{\sqrt{r^2 + s^2}},$$

care e echivalentă cu $r^2 + s^2 = 5(r + s)^2$. Rezultă $r = -\frac{1}{2}s$, $r = -2s$ și deci $x - 8 + 2y - 14 = 0$ respectiv $2x - y - 9 = 0$ sunt ecuațiile cerute.

4. Să se arate că cercul $C : x^2 + y^2 = 1$ nu este graficul nici unei funcții, dar este reuniunea graficilor a două funcții.

Soluție. Se știe că graficul unei funcții este intersectat de o dreaptă paralelă cu Oy într-un punct. Se observă însă că orice Oy intersectează C în două puncte de coordonate $(0, -1)$, $(0, 1)$. Pe cerc C nu este definită nici o funcție.

Pe de altă parte, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ este reprezentat în $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, iar $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$ este graficul funcției $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Căci C este reuniunea acestor două grafice.

5. Pentru cerc C dat de A și dat $[AB]$, de lungime $4a$, $a > 0$ și centru O , se consideră un punct mobil M .

1) Să se scrie ecuația lui C în coordonate Ox, Oy și în lungimi $AO = l$ și $BO = l$.

2) Să se scrie ecuația dreptei AP și BQ în funcție de coordonatele lui M și să se arate că dreapta AB este constantă și că dreptele AP și BQ se intersectează în același punct.

3) Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AP și BQ .

Soluție. Fixăm mai întâi reperul cartezian ca în figura IV. 5, considerăm dreapta AB ca Ox și mediatoarea segmentului AB ca Oy . Rezultă $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ și $C : x^2 + y^2 = 4a^2 = 0$. Fie $M(\alpha, \beta)$; $M \in C \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4a^2 = 0(1)$. Cercul circumscris triunghiului AOM are centrul P situat pe mediatoarea segmentului $[OA]$. Fie $P(a, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; atunci raza este $r = \sqrt{a^2 + \lambda^2}$, iar ecuația este $x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y = 0$ cu condiția $\alpha^2 + \beta^2 = -2a\alpha - 2\lambda\beta = 0(2)$.

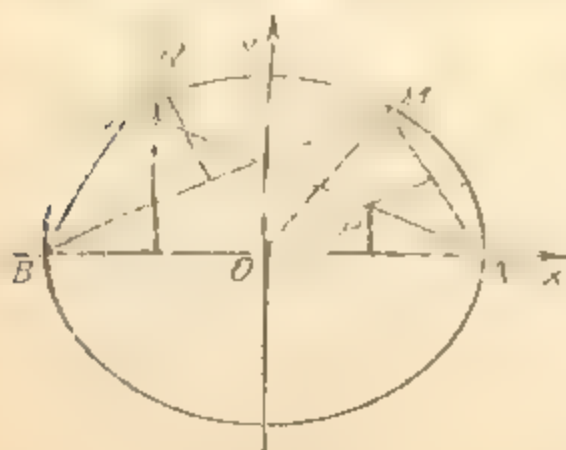


Fig. IV. 5.

Analog găsim ecuația cercului circumscris triunghiului BOI , cu centrul $O(-\alpha, \mu)$ $\mu \in \mathbb{R}$ și anume $x^2 + y^2 + 2ax - 2\mu y = 0$ cu condiția $\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha - 2\mu\beta = 0$ (1).

2) Din relațiile (1), (2), (3) deducem

$$d(P, P') = \left| \frac{a(2a - \alpha)}{\beta} \right|, \quad d(Q, Q') = \left| \frac{a(2a + \alpha)}{\beta} \right|, \quad \beta \neq 0$$

$$d(P, P') \cdot d(Q, Q') = \frac{a^2 \beta^2}{\beta^2} = a^2 = \text{const}$$

Panta dreptei AP este $m_1 = \frac{\lambda}{a}$, iar a dreptei BQ este $m_2 = \frac{\mu}{a}$. Deoarece $m_1 m_2 = \frac{\lambda \mu}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = -1$, dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

Observație Produsul $\lambda \mu$ este pozitiv, oricare ar fi poziția punctului M pe cercul C .

3) $L = \{L\} = AP \cap BQ$. Locul geometric al punctelor de intersecție ale dreptelor $d: x \cos \alpha + y = 1$ și $d': x - y \cos \alpha = 1$ este chiar cercul $C: x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$.

5. Să se găsească locul geometric al punctelor de intersecție ale dreptelor $d: x \cos \alpha + y = 1$ și $d': x - y \cos \alpha = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluție. Mă întrebăm în fapt dacă există o relație echivalentă cu $\cos \alpha \in [-1, 1]$, notăm $|1 - y| \leq |x|$, $|x - 1| \leq |y|$. Pentru a ne pune problema în acest fel, aparțin regiunii delimitate din figura IV.6. Evoluția locului geometric ca urmare a variației acestui regiuni.

Vom elimina parametrii α între ecuațiile lui d și d' printr-un procedeu care ține seama de faptul că aceste drepte nu trec prin origine:

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y = 1 \\ x - y \cos \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \cos \alpha + y^2 = y \\ x^2 - xy \cos \alpha = x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y$$

Rezultă că locul geometric căutat este descris de relațiile $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, $|1 - y| \leq |x|$, $|x - 1| \leq |y|$, adică el este cercul $\widehat{ABB'}$ (fig. IV.6) din cercul cu centrul în $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Să se rezolve inecuația

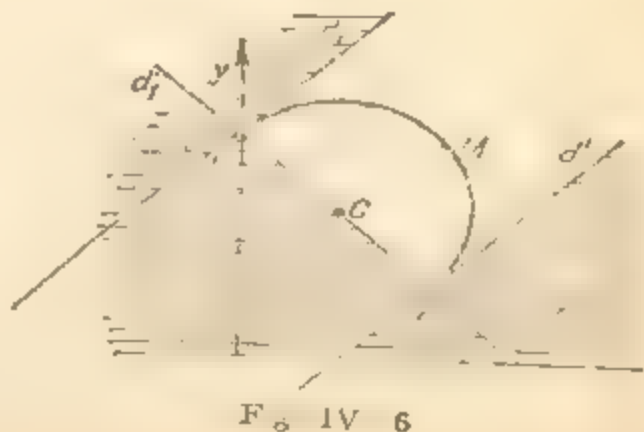
$$\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha - \sqrt{3} > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Notînd $\cos \alpha = x$ și $\sin \alpha = y$, inecuația dată în \mathbb{R} este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

în \mathbb{R}^2 .

Ecuația $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} = 0$ reprezintă o dreaptă d , iar ecuația $x^2 + y^2 = 1$ un



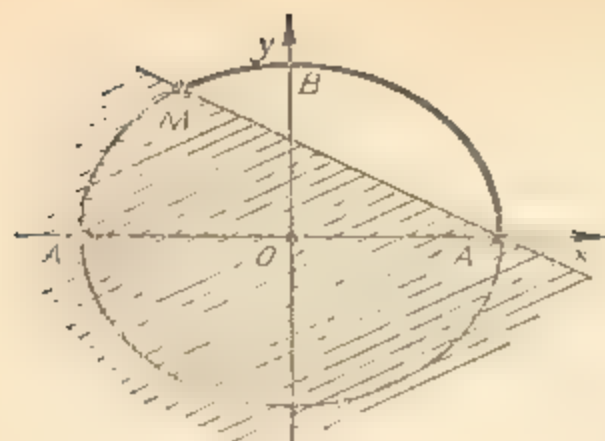


Fig. IV. 7

cerc C (fig. IV. 7). Calculăm coordonatele punctelor A și M , unde $\{A, M\} = d \cap C$. Rezolvind sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

obținem soluțiile $(1,0)$ și $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Fie $A(1,0)$

și $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Inecuația $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0$ este verificată de punctele din semiplanul $p^+ = \{N(x, y) \mid \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0\}$, (nehașurat în figură).

Mulțimea soluțiilor sistemului este arcul deschis \widehat{ABM} , intersecția dintre p^+ și C . Pe de altă parte avem

$$\begin{aligned} A(1, 0) &\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De aceea mulțimea soluțiilor inecuației din enunțul problemei este reuniunea mulțimilor

$$\left\{2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

§ 2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încât $d(F', F) = 2c$ (fig. IV.8).

Definiție. Fie $a > c$. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea

$$d(M, F') + d(M, F) = 2a$$

se numește **elipsă**.

Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a . Punctele F' și F se numesc **focarele elipsei**, dreapta $F'F$ se numește **axă focală** (sau **axă**), iar a și c ($d(F', F) = 2c$) se numesc **distanța focală**, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc **razele focale ale punctului M** .

Elipsa nu este o mulțime vidă deoarece cercul cu centrul în F și de rază a este mediatoarea segmentului $[F'F]$, în el se găsesc punctele B' și B care aparțin lui E , de exemplu $d(B, F) + d(B, F') = d(B, F) + d(B, F) = 2a$.

Dacă da $F'F$ și mediatoarea $B'B$ au ca punct comun, $F'F$ este **axă de simetrie** pentru E . Fie $F'F \cap B'B = \{O\}$. Punctul O este **centru de simetrie**. Fixăm

reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, $\vec{i} = \frac{OF}{\|OF\|}$,
 $\vec{j} = \frac{OB}{\|OB\|}$ ca în figura IV 8. Rezultă

$$F'(-c, 0), F(c, 0),$$

$$B'(0, -\sqrt{a^2 - c^2}), B(0, \sqrt{a^2 - c^2}).$$

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. Pentru orice punct $M(x, y)$ din plan notăm $d(M, F') = \rho'$,
 $d(M, F) = \rho$. Avem

$$\begin{cases} \rho'^2 = (x + c)^2 + y^2 \\ \rho^2 = (x - c)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx.$$

Deci

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' + \rho = 2a \\ \rho', \rho \in [a - c, a + c] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = a + \frac{cx}{a} \\ \rho = a - \frac{cx}{a} \end{cases}, \quad x \in [-a, a].$$

Astfel

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \\ (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Notând $b^2 = a^2 - c^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel $E = \left\{ M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt

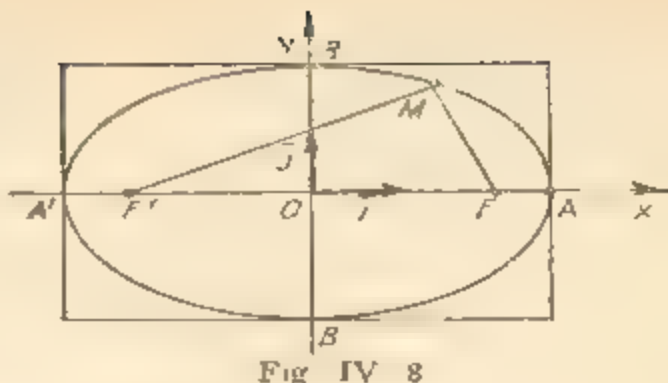
$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a elipsei. Ea este echivalentă cu ecuațiile parametrice în \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi), \quad t = \text{parametru}, \end{cases}$$

sau cu o ecuație

$$r = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

în V numită *ecuația vectorială* a elipsei.



Considerăm elipsa E de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}, x \in [-a, a].$$

Ecuația $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \geq 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \leq 0$. Acestea se numesc *ecuații cartesice explicite*.

Veale de coordonate ale elipsei în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ care se numesc *virfurile elipsei*. Segmentele $[A'A]$, $[B'B]$ sau distanțele $d(A', A) = 2a$, $d(B', B) = 2b$ se numesc respectiv *axa mare* și *axa mică* a elipsei. Jumătățile a și b se numesc *semiaxe*.

Dacă notăm cu E_1 și E_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \mapsto -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

definite respectiv pe $(-a, a)$, atunci se observă că

$$E = E_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup E_2$$

și deci elipsa are alura din figura IV. 8.

Iată în $M_0(x_0, y_0) \in E_1$. Tangenta în M_0 la E_1 are ecuația $y - y_0 = y'(x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 > 0$, unde $y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$, adică $y - y_0 =$

$$-\frac{bx_0}{a^2 y_0} (x - x_0), x_0 \in (-a, a), y_0 > 0. \text{ Analog, dacă } M(x_0, y_0) \in E_2,$$

pentru tangenta la E_2 în M_0 găsim ecuația $y - y_0 = \frac{bx_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 < 0$. Pe de altă parte, dreapta de ecuație $x = -a$ este tangentă la E în virful $(-a, 0)$, iar dreapta de ecuație $x = a$ este tangentă la E în virful $(a, 0)$. Ecuațiile

$$y - y_0 = -\frac{bx_0}{a^2 y_0} (x - x_0), y_0 \neq 0; x = -a; x = a$$

sînt cazuri particulare ale ecuației

$$(1) \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

(c) *Ecuații elipsei în punctul $M_0(x_0, y_0)$* În concluzie, elipsa E admite în orice punct $M_0(x_0, y_0)$ o tangentă de ecuație (1). Dreapta care trece

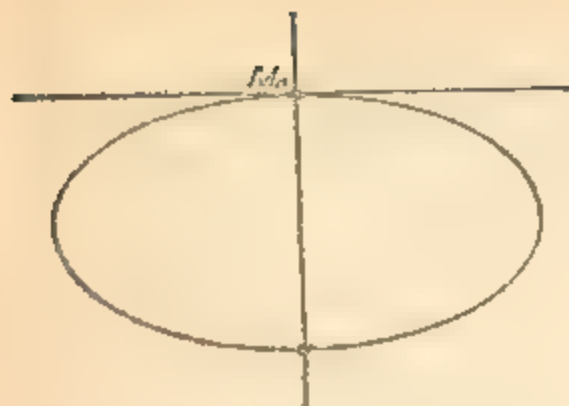


Fig. IV. 9



Fig. IV. 10

prin M_0 și este perpendiculară pe tangenta se numește *normală* la p în punctul M_0 (fig. IV. 9).

Teorema. Să se verifice că tangenta și normala la elipsă în punctele M_0 și M_1 sunt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele $F'M_0$ și $F'M_1$.

O elipsă are proprietatea că separe planul în două semiplanuri disjuncte (fig. IV.10) interiorul lui E notat $\text{int}(E)$ și exteriorul lui E notat $\text{ext}(E)$. Dacă avem funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, avem

$\text{int}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $E = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$,
 $\text{ext}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(E) \cap \text{ext}(E) = \emptyset$, $\text{int}(E) \cup E \cup \text{ext}(E) = \mathbb{R}^2$. Mai mult, mulțimile $\text{int}(E)$ și $\text{ext}(E)$ sunt convexe și conțin centrul O și focarele F' , F .

Construcția elipsei prin puncte (fig. IV. 11). Presupunem că se dau axele care [$F'F$] de lungime $2a$ și axa mică [$B'B$] de lungime $2b$.

1) Trăsim un punct O al planului drept înălțând sărăntele perpendiculare [$F'F$] și [$B'B$].

2) Luăm în compas distanța a și cu centrul în B se desenează un arc de cerc care trece pe [$A'A$] în focarele F' și F .

3) Se consideră un număr de puncte 1, 2, 3, ... pe axa mare.

4) Se ia în compas distanța de la A' la 1, apoi cu centrul în F' se trasează arce de cerc deasupra și dedesubtul axei mari.

5) Se ia în compas distanța de la A la 1; apoi cu centrul în F se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite în 4). Astfel se obțin două puncte ale elipsei de pe jumătatea din dreapta.

6) Se repetă pașii 4), și 5) schimbând pe F' cu F și astfel se obțin două puncte ale elipsei situate pe jumătatea din stînga.

7) Se repetă pașii 4), 5), 6) folosind distanțele de la A' la 2, de la A la 2, ... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a construi elipsa.

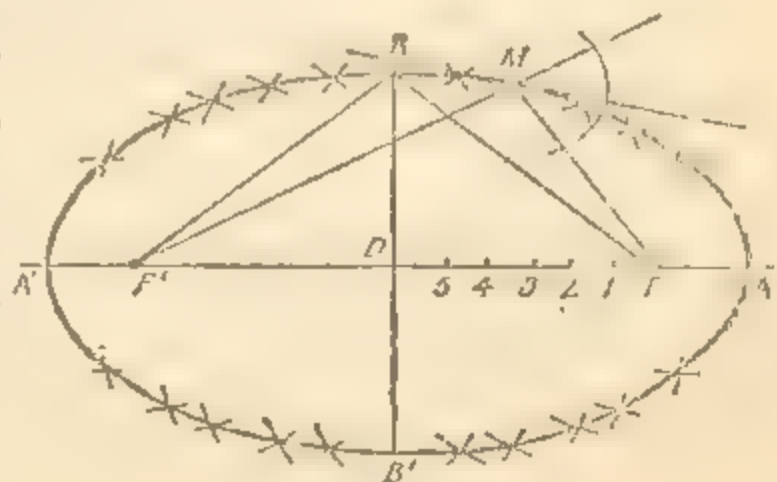


Fig. IV. 11

Punctul M a fost construit folosind distanțele de la A' la 4 și de la A la 4.

Desigur trebuie să ținem seama de faptul că elipsa nu este „ascuțită” în vîrfurile ei, iar tangenta în punctul M al elipsei este bisectoarea „exterioară” a unghiurilor dreptelor MF' și MF .

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră punctele variabile $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, astfel încît $d(A, B) = 6$.

Sa se gasească locul geometric al punctului M care împarte segmentul \overrightarrow{AB} în raportul $\frac{1}{2}$, punîndu-se în evidență ecuația carteziană implicită, ecuațiile parametrice și ecuația vectorială.

Soluție (fig. IV. 12) Fie $M(x, y)$ și $AM = \frac{1}{2} MB$. Rezultă $x = \frac{2\alpha}{3}$, $y = \frac{\beta}{3}$ și $\alpha^2 + \beta^2 = 36$.

Elimînd parametrii α, β între aceste trei relații, obținem elipsa $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 = 0$ de semiaxe $a = 4$, $b = 2$.

Ecuațiile parametrice ale lui E sînt $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, iar ecuația vectorială a lui E este $r = 4 \cos t \cdot \hat{i} + 2 \sin t \cdot \hat{j}$, $t \in [0, 2\pi)$.

2. Se consideră triunghiurile de tipul $M_1 M_2 M_3$ înscrise în elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = 0$, astfel încît centrele lor de greutate să coincidă cu centrul elipsei.

Sa se demonstreze că normalele la elipsă, duse prin vîrfurile triunghiului, sînt concurente.

Soluție (fig. IV. 13) Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, $M_i \in E \Leftrightarrow \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1 = 0$.

Centrul de greutate $G(x_G, y_G)$ are coordonatele $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, iar $G = 0$, implică $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Ecuațiile tangentelor la elipsa E , în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt $\frac{x_i x}{a^2} + \frac{y_i y}{b^2} = 1 = 0$, $i = 1, 2, 3$.

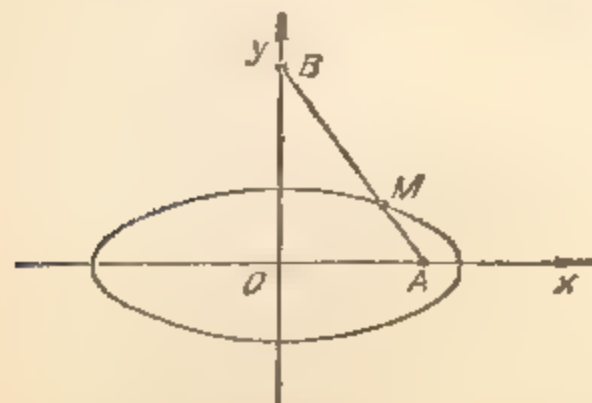


Fig. IV. 12

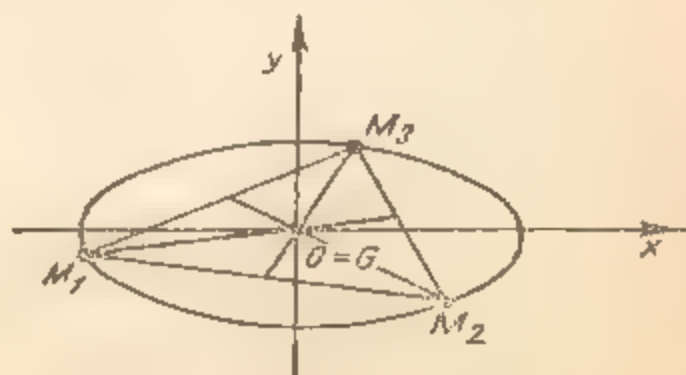


Fig. IV. 13

Ecuațiile normalelor în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt

$$\begin{aligned} a^2 y_1 x - b^2 x_1 y + (b^2 - a^2) x_1 y_1 &= 0, \\ a^2 y_2 x - b^2 x_2 y + (b^2 - a^2) x_2 y_2 &= 0, \\ a^2 y_3 x - b^2 x_3 y + (b^2 - a^2) x_3 y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aceste trei ecuații formează un sistem cu două necunoscute x, y , care este compatibilul determinat deoarece avem

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a^2 y_1 & -b^2 x_1 \\ a^2 y_2 & -b^2 x_2 \end{vmatrix} &\neq 0, \quad \begin{vmatrix} a^2 y_1 - b^2 x_1 & (b^2 - a^2) x_1 y_1 \\ a^2 y_2 - b^2 x_2 & (b^2 - a^2) x_2 y_2 \\ a^2 y_3 - b^2 x_3 & (b^2 - a^2) x_3 y_3 \end{vmatrix} = \\ &= -a^2 b^2 (b^2 - a^2) \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1 y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2 y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Rezultă că cele trei normale sînt concurente.

Teore. 1) Utilizînd ecuațiile parametrice ale elipsei E să se verifice existența triunghiurilor de tip II $M_1 M_2 M_3$. 2) Tangentele la E duse prin M_1, M_2, M_3 nu sînt concurente. De ce?

3. Să se arate că:

- 1) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și perimetrul date, triunghiul isoscel are aria maximă;
- 2) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și aria date, triunghiul isoscel are cel mai mic perimetru.

Soluție (fig. IV. 14). 1) Considerăm punctele fixe A, B și un sistem cartezian de axe ca în figură. Triunghiul ABM are perimetrul constant dacă și numai dacă M aparține elipsei de focare A și B . Este evident că triunghiul cu cea mai mare înălțime are cea mai mare arie, aceasta are loc pentru $M = C$, adică în cazul cînd ABC este un triunghi isoscel.

2) Se fixează baza $\{AB\}$ și lungimea înălțimii $d(O, C)$, unde $O(0, 0)$, $C(0, v)$, $C'(0, -v)$. Orice punct $N(x, y)$ din plan cu proprietățile $|y| > v$, $N \neq C$, $N \neq C'$ aparține exteriorului elipsei de focare A, B și deci perimetrul triunghiului ABN este mai mare decît perimetrul triunghiului ABC .

4. Considerăm planul complex. Fiecărui punct M , de afix $w = u + iv \neq 0$ i se asociază punctul P de afix $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$.

1) Să se exprime coordonatele x și y ale punctului P în funcție de modulul ρ și argumentul α ale lui w .

2) Să se arate că dacă M descrie cercul $u^2 + v^2 = r^2$, $r \neq 1$, atunci punctul P descrie o elipsă E .

Să se calculeze distanța focală a elipsei.

Soluție. 1) Dacă ρ este modulul, iar α argumentul numărului complex $w = u + iv$, atunci $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, cu $i^2 = -1$, iar $\frac{1}{w} = \frac{1}{\rho} (\cos \alpha - i \sin \alpha)$, $\rho \in (0, \infty)$,

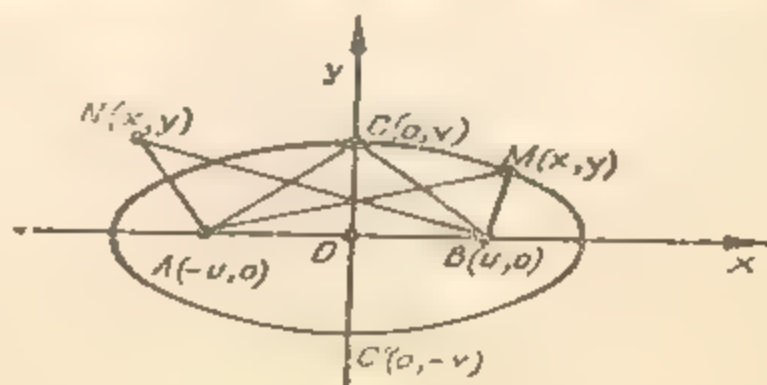


Fig. IV. 14

Rezultă

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2} \left[\rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) + \frac{1}{\rho} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \right] \text{ sau } x = \\ = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \alpha, \quad y = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \alpha.$$

b) Pentru a demonstra că punctul P descrie o elipsă, dacă punctul M descrie cercul $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, $r \neq 1$, vom elimina parametrul α între relațiile care dau pe x și y .

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha \\ y = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4r^2 x^2}{(r^2 + 1)^2} = \cos^2 \alpha \\ \frac{4r^2 y^2}{(r^2 - 1)^2} = \sin^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow E: \frac{x^2}{\left(\frac{r^2 + 1}{2r} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r^2 - 1}{2r} \right)^2} = 1.$$

Rezultă $a = \frac{r^2 + 1}{2r}$, $b = \frac{r^2 - 1}{2r}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{r^2 + 1}{2r} \right)^2 + \left(\frac{r^2 - 1}{2r} \right)^2} = 1$, adică distanța focală este 2.

Temă. Ce descrie punctul P dacă $r = 1$?

§ 3. Hiperbola

Pentru orice constantă pozitivă și F', F două puncte fixate din plan astfel încât $d(F', F) = 2c$.

Definiție. Fie $a \in (0, c)$. Mulțimea H a punctelor M cu proprietatea

$$|d(M, F') - d(M, F)| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Punctele F' și F se numesc *focaruri* hiperbolei, dreapta $F'F$ se numește *axă focală* și $d(F', F) = 2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *raze focale* ale punctului M .

Temă. Să se arate că hiperbola nu este mulțimea vidă.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea segmentului $F'F$ sînt *axe de simetrie* pentru H . Punctul lor comun O este *centru de simetrie*. Fixînd reperul cartezian ca în figura IV. 15 rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Teoremă. Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

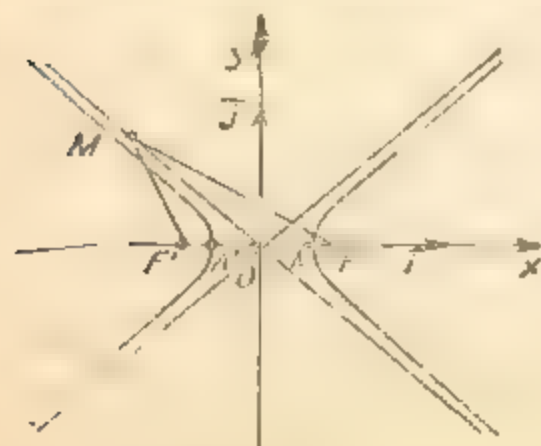


Fig. IV. 15

Demonstrație. Pentru orice punct $M(x, y)$ din plan notăm $d(M, F') = \rho'$ și $d(M, F) = \rho$. Avem

$$\begin{cases} \rho'^2 = (x + c)^2 + y^2, \\ \rho^2 = (x - c)^2 + y^2, \end{cases} \Rightarrow (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx.$$

Punem $H = H' \cup H''$, unde $H' = \{M \in p \mid \rho = \rho' = 2a\}$, $H'' = \{M \in p \mid \rho' - \rho = 2a\}$.

Rezultă

$$\begin{aligned} M \in H' &\Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' - \rho = -2a, \\ \rho' \in [c - a, \infty), \rho \in [c + a, \infty), \rho' < \rho \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = -a - \frac{cx}{a} \\ \rho = a - \frac{cx}{a} \end{cases}, x \in (-\infty, -a] \\ \\ M \in H'' &\Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' - \rho = 2a \\ \rho' \in [a + c, \infty), \rho \in [c - a, \infty) \\ \rho' > \rho \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = a + \frac{cx}{a} \\ \rho = -a + \frac{cx}{a} \end{cases}, x \in [a, \infty). \end{aligned}$$

Deci

$$M \in H = H' \cup H'' \Rightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \\ (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Notînd $b^2 = c^2 - a^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel, $H = \left\{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ sau mai simplu $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a hiperbolei. Axa Ox taie hiperbola H în punctele $(-a, 0), (a, 0)$ numite *virfurile hiperbolei*. De aceea axa Ox se numește *axa transversă* a hiperbolei. Axa Oy nu intersectează pe H (axa netransversă). Folosind funcția *cosinus hiperbolic*, $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{cht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ și funcția *sinus hiperbolic*, $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sh}t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, care satisfac identitatea $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ ajungem la un

mătoarele concluzii: ramura H' : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \leq -a$, are ecuațiile parametrice $x = -a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$ echivalente cu ecuația vectorială $\vec{r} = -a \cosh t \vec{i} + b \sinh t \vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$; ramura H'' : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq a$ are ecuațiile parametrice $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$ echivalente cu ecuația vectorială $\vec{r} = a \cosh t \vec{i} + b \sinh t \vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

Fie hiperbola H de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}, x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Ecuația $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbola cuprinsă în semiplanul $y \geq 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \leq 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziane explicite*.

Dacă notăm cu H_1 și H_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \rightarrow \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \rightarrow -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

definite respectiv pe $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, atunci se observă că

$$H = H_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup H_2.$$

Dreptele de panto $\pm \frac{b}{a}x$ care trec prin origine sînt drepte care nu taie hiperbola. Acestea se numesc *asimptotele hiperbolei* H . Ecuația reuniunii asimptotelor este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$. Ca și la elipsă se dovedește (temă!) că hiperbola H are în fiecare punct M_0 o *tangentă* de ecuație

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

(dedublata ecuației hiperbolei în punctul $M_0(x_0, y_0)$) Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala* hiperbolei în punctul M_0 (fig. IV. 16).

Discuția precedentă arată că hiperbola H are alura din figura IV. 15.



Fig. IV. 16

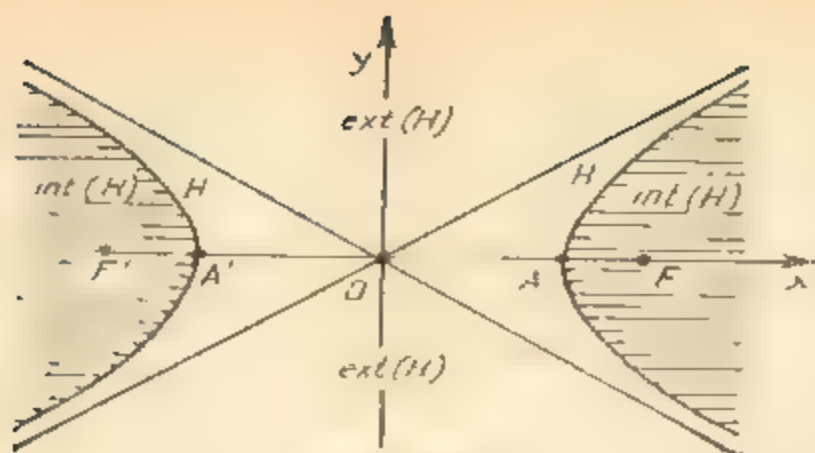


Fig. IV. 17

Teoremă. Sa se arate că tangenta și normala la hiperbola, în punctul M_0 , sînt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele $F''M_0$ și $F'M_0$.

O hiperbola are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. IV. 17): *interiorul* lui H notat $\text{int}(H)$ și *exteriorul* lui H notat $\text{ext}(H)$. Utilizând funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ avem $\text{int}(H) =$

$\{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $H = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(H) \cap \text{ext}(H) = \emptyset$, $\text{int}(H) \cup H \cup \text{ext}(H) = \mathbb{R}^2$, $\text{int}(H) = \text{int}(H') \cup \text{int}(H'')$, $\text{int}(H') \cap \text{int}(H'') = \emptyset$. Mai mult, $\text{ext}(H)$ conține centrul O . Mulțimea $\text{int}(H)$ conține focarele F' și F'' .

Construcția hiperbolei prin puncte (fig. IV. 18). Presupunem că se dau focarele F' , F'' și numărul $2a = |d(M, F') - d(M, F'')|$ cuprins între zero și distanța focală $d(F' - F'') = 2c$.

1) Fie O mijlocul segmentului $[F'F'']$, și $[A'A'']$ segmentul de lungime $2a$ cu mijlocul în O . Evident A' , A'' sînt punctele hiperbolei.

2) Se construiește o semidreaptă $[DC']$, unde $[DC']$ este un segment congruent cu $[A'A'']$. Pe această semidreaptă se fixează punctele 1, 2, 3.

3) Se ia în compas distanța de la D la 1 și cu vârful compasului în F' se trasează două arce de cer, de supra și de sub axa focală.

4) Se ia în compas distanța de la C' la 1 și cu vârful compasului în F'' se trasează două arce de cer care intersectează arcele construite la 3). Intersecțiile acestor arce dau două puncte ale hiperbolei pe ramura din stînga.

5) Se repetă pașii 3) și 4) schimbînd F' cu F'' și astfel se obțin două puncte ale hiperbolei pe ramura din dreapta.

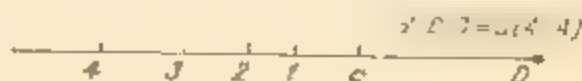
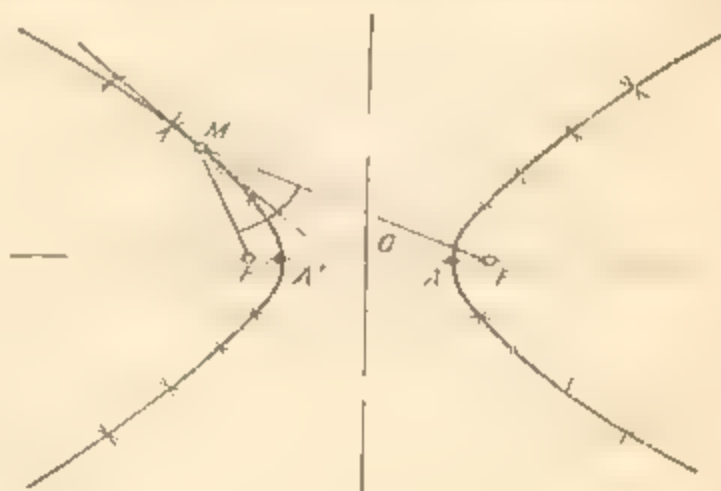


Fig. IV. 18

6) Se repetă pașii 3), 4), 5) folosind distanțele de la D la 2, de la C' la 2, până când se precizează un număr suficient de puncte pentru a putea trasa hiperbola.

Pentru desenarea efectivă se poate ține seama și de faptul că hiperbola nu este „ascuțită” în vecinătatea vîrfurilor, iar tangenta în punctul M al hiperbolei este „bisectoarea” „interioară” a unghiurilor dreptelor MF' și MF .

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dă hiperbola $H: 2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$.

1) Să se determine vîrfurile și asimptotele lui H .

2) Să se scrie ecuațiile parametrice respectiv vectoriale ale ramurilor lui H .

3) Să se găsească ecuația tangentei și ecuația normalei în punctul de coordonate $(\sqrt{10}, \sqrt{2})$.

Soluție. 1) Scriem ecuația lui H sub forma $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ ($a^2 = 5$, $b^2 = 2$).

și deci $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$. Vîrfurile lui H sînt $A'(-\sqrt{5}, 0)$, $A(\sqrt{5}, 0)$. Relația $c^2 = a^2 + b^2$ dă $c^2 = 7$ și deci focarele sînt $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$.

Reuniunea asimptotelor lui H are ecuația $2x^2 - 5y^2 = 0$. Explicit cele două asimptote au respectiv ecuațiile $y = \sqrt{\frac{2}{5}}x$, $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}x$.

2) Ramura din semiplanul $x \geq \sqrt{5}$ are ecuațiile parametrice $x = \sqrt{5} \operatorname{ch} t$, $y = \sqrt{2} \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$ și ecuația vectorială $r = \sqrt{5} \operatorname{ch} t i + \sqrt{2} \operatorname{sh} t j$.

3) Ecuația carteziană a tangentei se obține prin derivare: $2\sqrt{10}x - 5\sqrt{2}y = 10$ ($x = \sqrt{10}$, $y = \sqrt{2}$). Rezultă ecuația normalei: $y - \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x - \sqrt{10})$.

2. Pe axa Ox a reperului cartezian COy se au punctele M și N astfel încît produsul absciselor lor să fie constanta a^2 . Prin M și N se duc două drepte MP și NP , avînd coeficienți unghiulari egali respectiv cu $\frac{b}{a}$ și $-\frac{b}{a}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

Să se afle locul geometric al punctului P .

Soluție. Fie $M(\alpha, 0)$, $N(\beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta = a^2$ (1). Rezultă $MP: y = \frac{b}{a}(x - \alpha)$

(2); $NP: y = -\frac{b}{a}(x - \beta)$ (3).

Pentru a scrie ecuația carteziană a locului geometric descris de punctul P vom elimina parametrii α și β , între relațiile (1), (2), (3).

Ecuațiile (2) și (3) se mai pot scrie astfel: $y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\alpha$, $y = -\frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\beta$.

Înmulțind aceste două ecuații membru cu membru și ținînd cont de relația (1), obținem ecuația unei hiperbole

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

3. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ și $C(0, -1)$. O dreaptă variabilă d ce trece prin originea taie pe AB în P și pe AC în Q .

Se cer:

1) coordonatele mijlocului M al segmentului PQ ,

2) locul geometric al lui M când dreapta d se rotește în jurul lui Q ,

3) să se determine dreapta d astfel încît $d(O, A) = d(M, A)$.

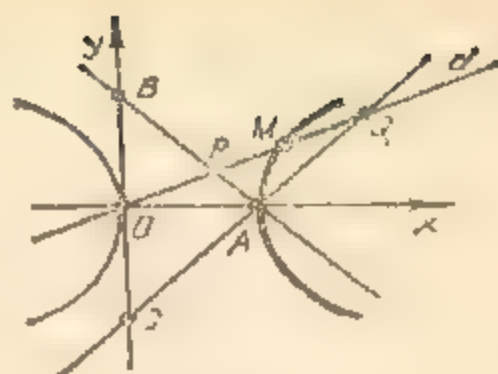


Fig. IV. 49

Soluție (Fig. IV. 49). Avem $AB: x + y - 1 = 0$, $AC: x - y + 1 = 0$, $d: ax + by = 0$.
 Având pe a și $b \neq 0$ găsim $P\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$ și $Q\left(\frac{b}{a-b}, \frac{a}{a-b}\right)$ pentru $a \neq b$. Coordonatele lui M sînt

$$x = \frac{b}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

2) Presupunem că a și b sînt variabile. Prin eliminarea lui a și b dintre relațiile precedente se obține ecuația carteziană a locului geometric descris de M și anume $x^2 - y^2 = 1$. Această ecuație se poate transcrie în formă

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1 = 0.$$

Astea reprezintă o hiperbolă cu centrul în punctul $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, cu vîrfurile $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ și cu asimptotele de ecuații $2x + 2y + 1 = 0$, $2x - 2y - 1 = 0$.

$$3) \text{ Din } d(O, A) = d(M, A) \text{ rezultă } \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{ab}{a^2 - b^2}\right)^2 = 1 \text{ sau } b^4$$

de unde $b = 0$. Valoarea $b = 0$ nu convine problemei. Rămîne $b^2 = 3a^2$, adică $b = \pm \sqrt{3}a$.
 Avem deci două drepte care fac cu Ox respectiv unghiurile $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{5\pi}{6}$.

4) Se consideră dreptele $d_m: (m^2 + 1)x + 2my + 1 - m^2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

1) Există trei drepte distincte $d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3}$ care trec printr-un punct dat al planului?

2) Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului?

Soluție. 1) Fie

$$\begin{cases} (m_1^2 + 1)x + 2m_1y + 1 - m_1^2 = 0, \\ (m_2^2 + 1)x + 2m_2y + 1 - m_2^2 = 0, \\ (m_3^2 + 1)x + 2m_3y + 1 - m_3^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sistemul format din ecuațiile celor trei drepte distincte $d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3}$.

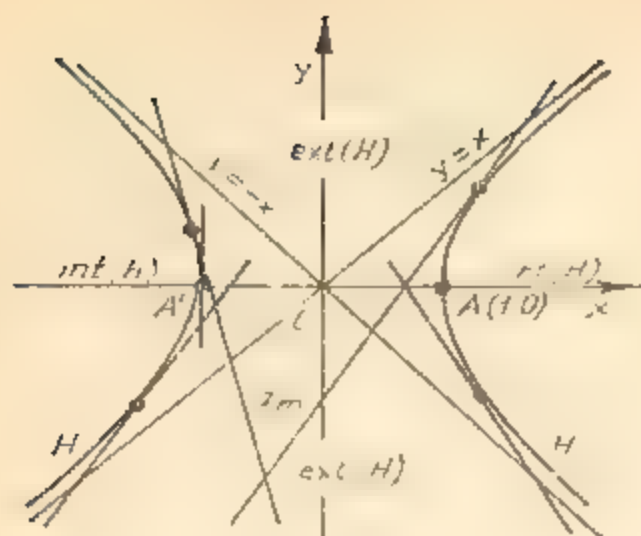


Fig. IV. 20

trece o singură dreaptă d_m prin punctul de coordonate $(1, 0)$ nu trece nici o dreaptă d_m .
 1. $x \neq 1$, $1 - y^2$ de gradul $n-1$, m rădăcini reale numai dacă $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$.
 Dar ecuația $x^2 - y^2 - 1 = 0$ reprezintă o hiperbolă H . Astfel prin fiecare punct al lui H diferit de punctul de coordonate $(1, 0)$ trece o singură dreaptă d_m , prin fiecare punct al regiunii $\text{ext}(H) = \{(1, y), y \neq 0\}$ trec două drepte distincte, iar prin fiecare punct al regiunii $\text{int}(H)$ nu trece nici o dreaptă.

Evident a doua intersecție o conține pe punctul

Comenzor (c.g. IV. 20) 1. Dreptele d_m ($m = 1, 2, \dots$) sînt asimptotele hiperbolici H .

2. Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$ deci $x_0^2 - y_0^2 = 1$. $x_0 - xy_0 - 1 = 0$ ecuația tangentei la H în punctul M_0 . De aceea $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ dacă și numai dacă $\frac{x_0}{m^2 + 1} =$

$$\frac{y_0}{2m} = \frac{1}{1 - m^2} \quad \forall m \neq \pm 1 \text{ zădărnice drepte } l = m \neq \pm 1 \text{ sînt secante la } H.$$

5. Raportăm planul la reperul cartezian xOy și considerăm dreptele $h: x - y = 0$, $k: x + y = 0$. Să se calculeze distanțele de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreptele h și k . În ipoteza $x_0^2 - y_0^2 = 1$, să se calculeze limitele acestor distanțe pentru $x_0 \rightarrow \pm \infty$.

$$\text{Soluție. Se obține } d(M_0; h) = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}.$$

Relația $x_0^2 - y_0^2 = 1$ se transformă în $\left[\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}} \right]^2 - \left[\frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}} \right]^2 = 1$.

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{|x_0|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \infty = \infty.$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{|x_0|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \left[\frac{x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2}{x_0^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{|x_0|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \left[\frac{x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2}{x_0^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{|x_0|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \left[\frac{x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2}{x_0^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Analog se calculează și $\lim_{x_0 \rightarrow \pm \infty} d(M_0; k)$.

Deoarece

$$\begin{vmatrix} m_1^2 + 1 & 2m_1 & 1 - m_1^2 \\ m_2^2 + 1 & 2m_2 & 1 - m_2^2 \\ m_3^2 + 1 & 2m_3 & 1 - m_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$$

(determinant Vandermonde), nu există trei drepte distincte concurente.

2. Se observă că d_m ($m = 1, 2, \dots$) \perp $2my + 1 = 0$.
 1. Fie $x = 1$ atunci ecuația în m este d_m \perp $2m + 1 = 0$. De aceea $m = -1/2$ este punct de coordonate $(1, y)$, $y \neq 0$.

§ 4. Parabola

Fie h o dreapta din plan și F un punct care nu aparține lui h .

Definiție. Mulțimea P a punctelor M cu proprietatea

$$d(M; h) = d(M, F)$$

se numește **parabolă**.

Punctul F se numește *focarul parabolei*, iar dreapta h se numește *directoarea parabolei*. Parabola nu este vidă: fie $B \in h$, un punct fixat, fie h perpendiculară în B pe h și l mediatoarea segmentului $[BF]$; notind $\{M\} = h \cap l$ rezultă $M \in P$.

Fie A proiecția lui F pe h . Dreapta AF este *axă de simetrie* pentru parabola P . Numărul $p = d(A, F) > 0$ se numește *parametru parabolei*. Notind cu O mijlocul segmentului $[AF]$ și alegind reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ ca în figura 21 avem

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad h: x = -\frac{p}{2}, \quad A\left(-\frac{p}{2}, 0\right).$$

Teoremă. Punctul $M(x, y)$ aparține parabolei P dacă și numai dacă

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in P \Leftrightarrow d(M, h) = d(M, F) \Leftrightarrow d^2(M; h) = d^2(M, F) \Leftrightarrow$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Deci $P = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = 2px\}$ sau $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = 2px, x \geq 0\}$. De aici, $y^2 = 2px, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, se poate deduce ca ecuația carteziană implicită a parabolei. Aceasta este echivalentă cu ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sau cu ecuații vectoriale

$$P = \frac{t^2}{2p} \vec{i} + t \vec{j}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Axa Ox tang parabola în punctul $O(0, 0)$ numit *vârful parabolei*. De aceea Ox se numește *axă transversă*. Axa Oy este *rectransversă*.

Fie parabola P de ecuație

$$y^2 = 2px, \quad x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2px} \\ \text{sau} \\ y = -\sqrt{2px} \end{cases}, \quad x \geq 0.$$

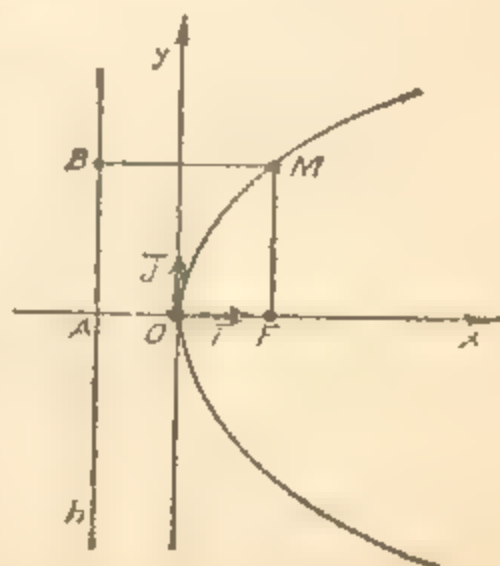


Fig. IV-21

Ecuația $y = \sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în primul cadran, $x \geq 0$, $y \geq 0$, iar ecuația $y = -\sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în cadranul patru, $x \geq 0$, $y \leq 0$. Acestea se numesc *ecuații carteziene explicite*.

Da, notăm cu P_1 și P_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \mapsto \sqrt{2px}, \quad x \mapsto -\sqrt{2px}$$

definite respectiv pe $(0, \infty)$, atunci se observă că

$$P = P_1 \cup \{(0, 0)\} \cup P_2$$

și deci parabola are alura din figura IV. 21.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$. Împrumutând procedul de la elipsa se poate atăta (fără) ca parabola P are în fiecare punct M_0 o tangentă de ecuație

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

(dublata ecuației parabolei în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala parabolei* în punctul M_0 (fig. IV. 22).

Teoremă. Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$, fie B proiecția lui M pe directoarea h și F focarul lui P . Să se verifice următoarele proprietăți:

- 1) Tangenta la P în M_0 este mediatoarea segmentului $\{BF\}$.
- 2) Tangenta la P în M_0 este bisectoarea unghiului $(\widehat{M_0F}, \widehat{M_0B})$.
- 3) Proiecția ortogonală a focarului pe tangentă în M_0 aparține tangentei în vîrf.
- 4) Simetricul focarului în raport cu tangentă în M_0 aparține directoarei.

Parabola P împarte planul în două submulțimi disjuncte (fig. IV. 23) interiorul lui P notat $\text{int}(P)$ și exteriorul lui P notat $\text{ext}(P)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - \sqrt{2px}$. Anume $\text{int}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $P = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$.

$$\text{int}(P) \cap \text{ext}(P) = \emptyset, \quad \text{int}(P) \cup P \cup \text{ext}(P) = \mathbb{R}^2.$$

Mulțimile $\text{int}(P)$ și $\text{int}(P) \cup P$ sînt convexe și conțin focarul F . Directoarea parabolei este conținută în $\text{ext}(P)$.

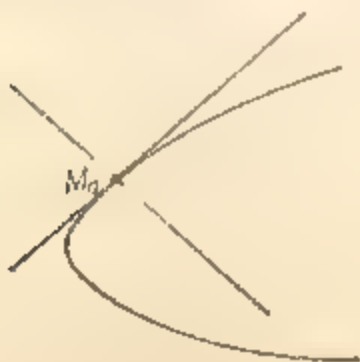


Fig. IV. 22

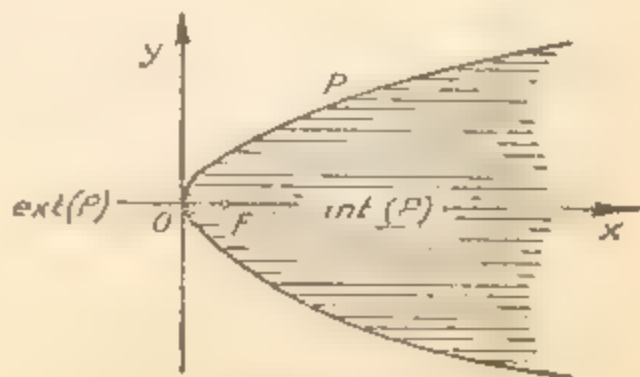


Fig. IV. 23

Construcția parabolei prin puncte (fig. IV-24). Presupunem că se dau focarul F și directoarea h .

1) Se localizează focarul F și directoarea h .

2) Se desenează dreptele 1, 2, 3, ..., paralele cu directoarea.

3) Se ia în compas distanța de la directoarea h la dreapta 1. Cu vârful compasului în focar, se trasează două arce de cerc care intersectează dreapta 1. Astfel se obțin două puncte ale parabolei.

4) Se repetă pasul 3) pentru dreptele 2, 3, ...

5) După determinarea unui număr suficient de puncte, se desenează parabola (fig. 24) dându-se seamă că vârful O este la jumătatea distanței dintre h și F , iar tangenta în fiecare punct M de pe parabolă este bisectoarea unghiului FMB .

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian Oxy se dau punctul $A(1,0)$ și dreapta $d: x + 1 = 0$.

1) Să se găsească ecuația cercurilor C care trec prin A și cu centrele pe dreapta d .

2) Un cerc C taie dreapta d în punctele P și Q . Tangentele la C în P și Q intersectează tangenta la C în A respectiv în punctele M și N . Să se găsească locul geometric al punctelor M și N .

Soluție (fig. IV-25). $F \in R(-1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, centrul cercului variabil C . Raia acestor cerce este $d(R, A) = \sqrt{4 + \lambda^2}$. Rezultă $C: (x + 1)^2 + (y - \lambda)^2 = 4 + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Raia numită a cercurilor C_λ este 2 și se obține pentru $\lambda = 0$.

2) Se observă că $d(M, A) = d(M, P)$, $d(N, A) = d(N, Q)$, $MP \perp d$, $NQ \perp d$. Deci $d(M, A) = d(M, d)$, $d(N, A) = d(N, d)$, adică M și N aparțin parabolei de focar A și directoare d . Se observă însă că vârful parabolei nu convine problemei.

Notă. Rezolvarea putând fi realizată cu ajutorul bisectoarei prezintă alte calcule și precum:

2. Prin focarul F al unei parabole $P: y^2 = 2px$ se duc două drepte variabile perpendiculare, care intersectează directoarea parabolei în punctele M_1 și M_2 . Paralele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei taie curba P în punctele N_1 și N_2 . Să se arate că punctele N_1 , N_2 și F sunt coliniare.

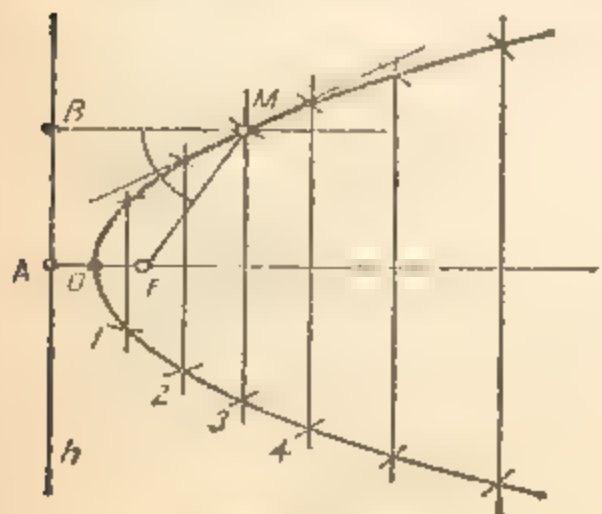


Fig. IV-24

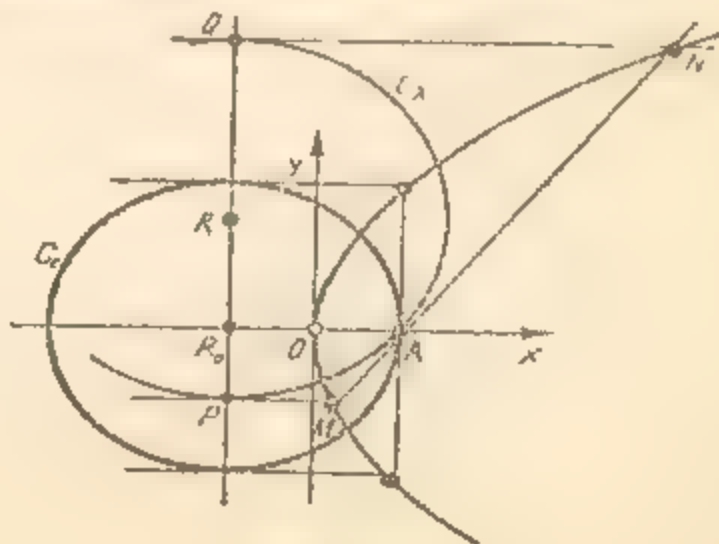


Fig. IV-25

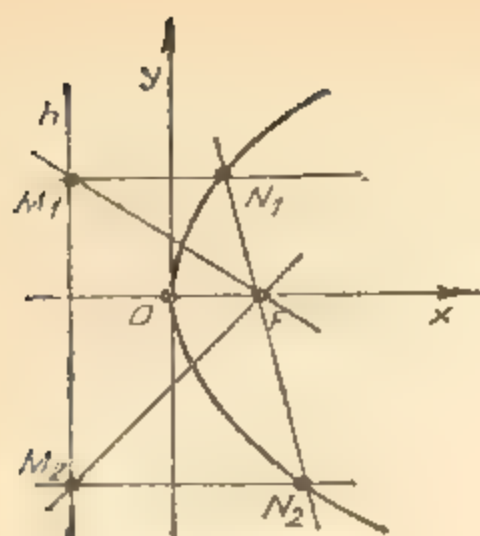


Fig. IV. 26

Soluție (fig. IV. 26). Focarul parabolei $P: y^2 = 2px$ este punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar directoarei h îi corespunde ecuația $x = -\frac{p}{2}$. Fie dreptele perpendiculare $d: y =$

$$m\left(x + \frac{p}{2}\right) \quad d' \perp h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x + \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases}, \text{ cu } m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\{M_1\} = d \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x + \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1\left(-\frac{p}{2}, pm\right),$$

$$\{M_2\} = d' \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x + \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{m}\right).$$

Punctele dinse prin M_1 și M_2 la parabola au respective coordonatele $y = pm$ și $y = \frac{p}{m}$. Coordonatele punctelor N_1 și N_2 sînt soluțiile unuia din cele două sisteme de ecuații

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -pm \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{p}{m} \end{cases}.$$

Rezolvînd aceste sisteme, obținem

$$N_1\left(\frac{pm^2}{2}, -mp\right), \quad N_2\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right).$$

Coordonatele punctelor N_1 , N_2 și F verifică condiția de coliniaritate a trei puncte, adică

$$\begin{vmatrix} \frac{pm^2}{2} & -mp & 1 \\ \frac{p}{2m^2} & \frac{p}{m} & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p}{2} \cdot \begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Fie parabola $P: y^2 = 4ax$ cu directoarea $h: x = -a$. Se considera o pereche de tangente la parabola, perpendiculare între ele, și se notează cu M punctul lor de intersecție. Să se arate că dacă punctele de tangență descur parabola, atunci $h \subset \{M\}$.

Soluție. Incluziunea $\{M\} \subset h$ se arată fără dificultate: tangentele la P în punctele $(at^2, 2at)$, $(as^2, 2as)$ au ecuațiile $yt = x + at = m + as = c + as^2$, sînt perpendiculare numai dacă $st = -1$, și deci se intersectează într-un punct de abscisă $x = ast = -a$.

Pentru $h \in \{M\}$ trebuie să arătăm că dacă $N \in h$ atunci (1) există exact două tangente la parabola ce trece prin N și (2) ele sunt perpendiculare. punctul $N(-a, r)$ se află pe o tangentă $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $at^2 - rt - a = 0$; deoarece $a \neq 0$ și $r^2 - 4a^2 = 0$ există două astfel de numere (deci (1) este dovedită) al căror produs este -1 (deci (2) este dovedită).

Relațiile $\{M\} \subseteq h, h \subseteq \{M\}$ sunt echivalente cu $M = h$.

Notă. Problema precedentă putea fi formulată astfel: să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente la parabola P perpendiculare între ele. Am preferat însă enunțul inițial pentru a pune încă o dată în evidență faptul că determinarea locurilor geometrice impune dovedirea a două incluziuni.

4. Să se arate că trei tangente distincte la parabola $P: y^2 = 2px$ determină un triunghi al cărui ortocentru aparține directoarei parabolei.

Soluție. Fie parabola $P: y^2 = 2px$ și trei puncte diferite $T_i(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, situate pe parabola P , deci $y_i^2 = 2px_i, i = 1, 2, 3$.

Ecuatiile celor trei tangente sunt

$$d_1: 2px - 2y_1y - y_1^2 = 0,$$

$$d_2: 2px - 2y_2y - y_2^2 = 0,$$

$$d_3: 2px - 2y_3y - y_3^2 = 0.$$

Înălțimile triunghiului, corespunzătoare laturii d_1 este

$$2py_1x + 2p^2y - p^2(y_2 + y_3) - y_1y_2y_3 = 0.$$

Intersecționând această înălțime cu directoarea $h: x = -\frac{p}{2}$, obținem punctul M , de coordonate

$$x = -\frac{p}{2}, y = \frac{y_1y_2y_3 + p^2(y_1 + y_2 + y_3)}{2p^2}.$$

Ordonata y a punctului M , fiind o expresie simetrică în y_1, y_2, y_3 , rezultă că ortocentruul triunghiului $M_1M_2M_3$ este situat pe directoarea h .

5. Se da familia de funcții $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = \frac{1}{5}x^5 + ax$, unde a este un parametru real. Să se determine mulțimea tuturor punctelor critice ale funcțiilor f_a . Să se stabilească tipul punctelor critice.

Soluție. Deoarece $\frac{df_a}{dx}(x) = x^2 + a$, mulțimea tuturor este parabola $P: x^2 + a = 0$

din planul xOa (fig. IV. 27). Pe de altă parte observăm că

$\frac{d^2f_a}{dx^2}(x) = 2x$. De aceea punctele de abscisă $x = 0$

sunt puncte de maxim, punctul $x = 0$

este un punct de inflexiune, iar punctele de abscise

$x = \sqrt{-a} > 0$ sunt puncte de minim. Varia-

țiile pentru graficele funcțiilor f_a sunt date în

figura IV. 28.



Fig. IV. 27



Fig. IV. 28

§ 5. Conice

Un plan p intersectează într-un punct sau în două puncte de axă h și generatoarea g a unui con, plan p sînt de următoarele tipuri (fig. IV. 29)

- 1) cerc sau punct, dacă $p \perp h$;
- 2) elipsă sau punct, dacă $(p, h) > (g, h)$;
- 3) parabolă sau pereche de drepte confundate, dacă $(p, h) = (g, h)$;
- 4) hiperbolă sau pereche de drepte, dacă $0^\circ \leq (p, h) < (g, h)$.

Toate aceste conice poartă numele de *conice* și sînt caracterizate prin ecuații de gradul doi în x și y , unde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De aceea ap. re. e natural să se pună problema generală a conicelor în mulțimea de planuri, din planuri, ale căror coordonate constituie soluțiile unei ecuații de gradul doi în \mathbb{R}^2 .

Fie funcția polinomială

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} \\ a_{11} = a_{12}^2 - a_{22}^2 \neq 0$$

Definiție. Mulțimea

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$$

se numește curbă algebrică de ordin al doilea sau conică. Pe scurt se notează $\Gamma: g(x, y) = 0$.

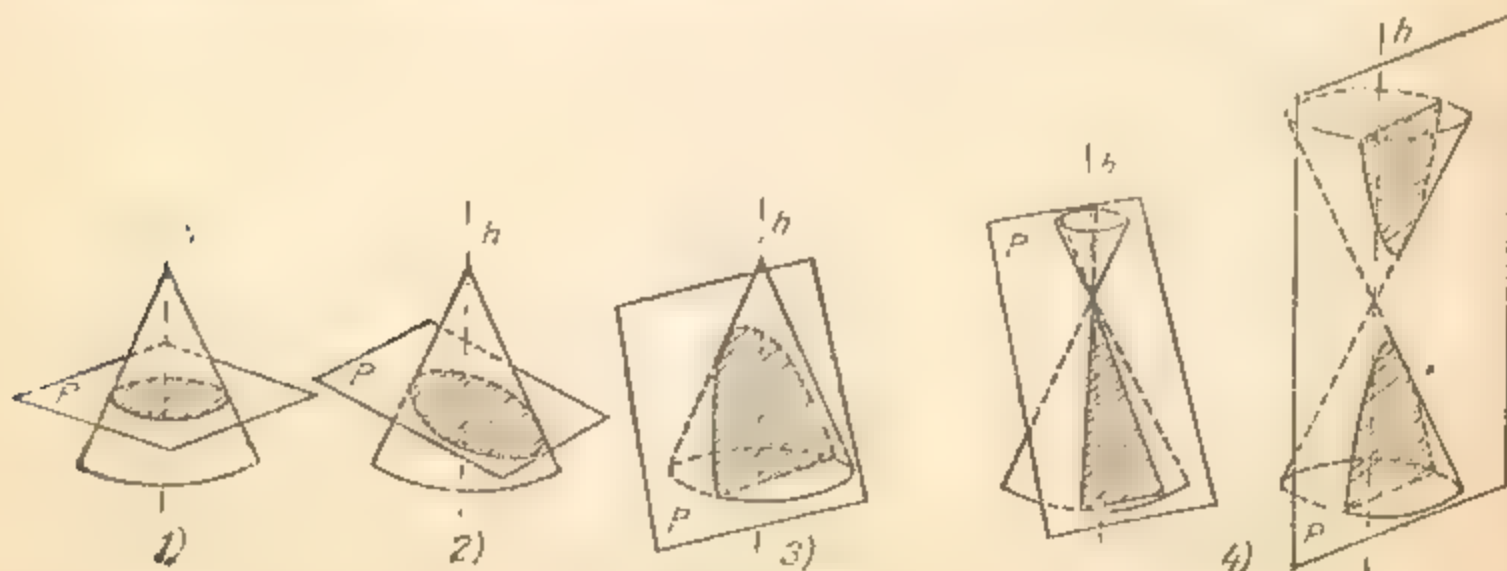


Fig. IV. 29

Teorema 3. Mulțimea Γ este conștinută cu una tocă n'ordine din figura IV. 30.

Demonstrație. Subliniem că enunțul teoremei este echivalent cu fiecare dintre afirmațiile următoare.

1) Γ este fie un cerc (fig. IV. 30.1), o elipsă (fig. IV. 30.2), o hiperbolă (fig. IV. 30.3), o parabolă (fig. IV. 30.4), o reuniune de drepte (fig. IV. 30.5, 6, 7), o mulțime care conține un singur punct (fig. IV. 30.8), fie mulțimea vidă (fig. IV. 30.9).

2) orice ecuație de tipul $g(x, y) = 0$ poate fi redusă la una dintre ecuațiile conștinute scrise în figura IV. 30.

Cazul cînd Γ reprezintă un cerc ($a_{11} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$) este cunoscut din §1. De altfel, el, cum poate fi privit ca o elipsă particulară. De aceea, acei caz es eci sal' l' 1, 2, 6). Notăm

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

n) Presupunem $a_{12} = 0$. Dacă $\delta \neq 0$, în orice punct (x, y) se poate obține ecuația

$$a_{11} \left(x + \frac{a_{10}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y + \frac{a_{20}}{a_{22}} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

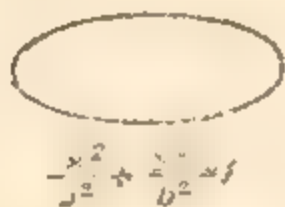
și translația

$$x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_{20}}{a_{22}}$$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

1



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3



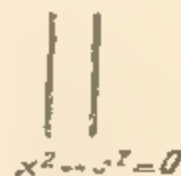
$$y^2 = 2px$$

4



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

5



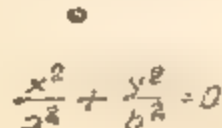
$$x^2 - y^2 = 0$$

6



$$x^2 = 0$$

7



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

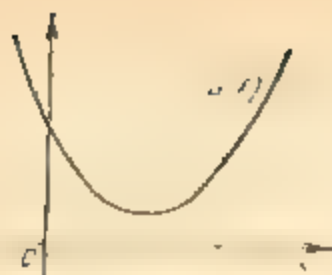
8



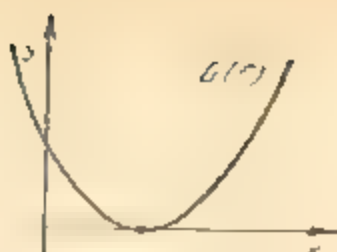
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \forall \quad x^2 + y^2 = 0$$

9

Fig. IV. 30

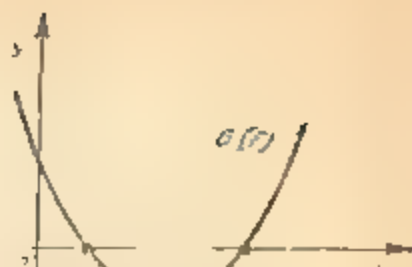


$$b^2 - 4ac > 0$$



$$b^2 - 4ac = 0$$

Fig. IV. 31



$$b^2 - 4ac < 0$$

poziției în teorema. Dacă $\delta = 0$, de exemplu $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{22} \left(y - \frac{2a_{12}x}{a_{22}} \right)^2 + 2a_{10}x + a_{00} - \frac{4a_{12}^2x^2}{a_{22}} = 0$$

și teorema devine evidentă.

b) Dacă $a_{11} \neq 0$, atunci unghiul θ determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12}$, $\cos 2\theta$, $\theta \in [0, \pi)$, determină o rotație în plan

$$\mathcal{A}: \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

astfel încât în ecuația $g'(x', y') = (g \circ \mathcal{A})(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează. Într-adevăr, coeficientul respectiv este $2a_{12} = 0$, $a_{11} \cos 2\theta + 2a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \cos 2\theta$. Astfel cazul $a_{12} \neq 0$ se reduce la cazul $a_{12} = 0$.

Cazuri particulare

1) Fie termenul de gradul al doilea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Graficul $G(f)$ are ecuația carteziană explicită $y = ax^2 + bx + c$. Acest grafic este o parabolă (fig. IV. 31, $a > 0$) cu axa transversă paralelă cu Oy și cu vârful

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

2) Mulțimea de ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o hiperbolă cu Oy ca axă transversă și Ox ca axă netransversă având aceleași asimptote cu hiperbola de

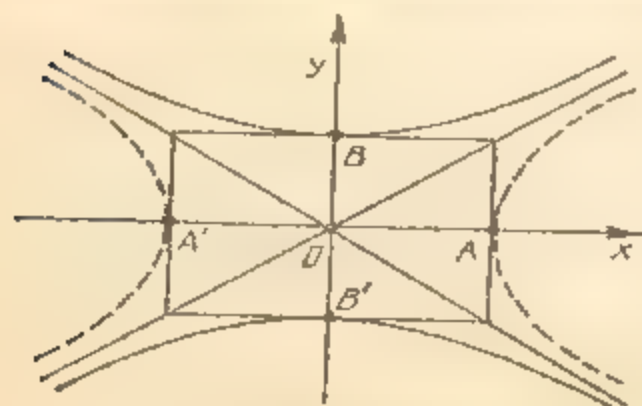


Fig. IV. 32

ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aceste două hiperbole se numesc *conjugate* una alteia (fig. IV. 32).

3) Hiperbola de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ se numește *hiperbolă echilaterală*. Asimptotele acestei hiperbole sînt bisectoarele axelor de coordonate,

$$y = -x \text{ și } y = x.$$

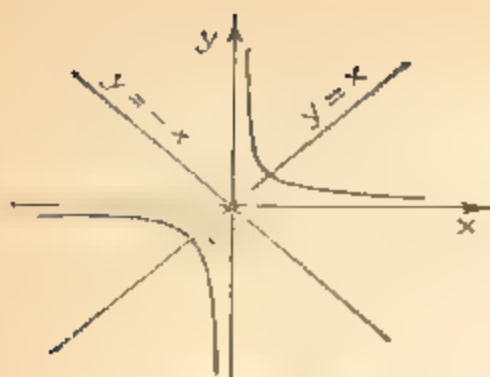


Fig. IV. 11

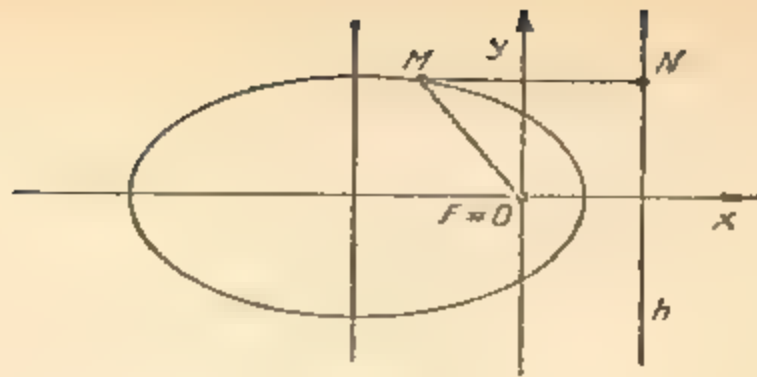


Fig. IV. 12

Fie conica $\Gamma: xy = m^2$. Rotația $(k, c) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ pune în evidență că Γ este o hiperbolă echilateră de ecuație canonică $x'^2 - y'^2 = 2m^2$. Asimptotele lui Γ sunt axele de coordonate Ox și Oy , iar axele de simetrie sînt bisectoarele axelor de coordonate (fig. IV. 11).

Definiția comună a elipsei, hiperbolei și parabolei. Fie F un punct fix numit *focar*, h o dreaptă fixă care nu trece prin F , numită *directoare*, și $e \in (0, \infty)$ un număr numit *excentricitate*. Locul geometric al punctelor M cu proprietatea

$$\frac{d(M, F)}{d(M, h)} = e$$

este elipsa în cazul $e \in (0, 1)$, o parabolă pentru $e = 1$ sau o hiperbolă în cazurile $e \in (1, \infty)$.

Să explicăm cazul $e \in (0, 1)$. Pentru simplificare, să considerăm un caz particular. Fie h o dreaptă perpendiculară pe h și $F = O$ (fig. IV. 12). Dacă $P_1(x_1, y_1) \in h$, $x_1 > 0$ și M are coordonatele x, y , atunci rotația axelor este echivalentă cu rotația

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

sau altfel scris

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad x^2 + y^2 = 1, \quad e = \frac{OF}{OP_1} = \frac{OF}{x_1}.$$

Acesta împreună cu translația definită prin $x' = x + \frac{r}{e}$, $y' = y$ pun în evidență că în cazul $e \in (0, 1)$ locul geometric este o elipsă.

Cazul parabolei a fost prezentat în §4, iar cazul $e \in (1, \infty)$ se tratează după modelul precedent.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a parabolilor de ecuații $y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m$, $y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p$, dacă $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1$.

Soluție. Pentru găsirea ecuației carteziene a locului geometric trebuie să eliminăm parametrii m și p între următoarele ecuații

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \\ y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1. \end{cases}$$

Scăzând primele două egalități, obținem

$$\left(\frac{3}{2}x - m - p - 1\right)(p - m) = 0.$$

Dacă $p = m$, atunci din ultima ecuație deducem $m^2 - 2m - 1 = 0$ sau $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, locul geometric căutat este reuniunea parabolilor de ecuație $y = x^2 - \frac{3}{2}m_{1,2}x + m_{1,2}^2 + m_{1,2}$.

Dacă $\frac{3}{2}x - m - p - 1 = 0$, atunci $y = x^2 - mp$. Transcriind ultima ecuație în formă $m + p + 1 = mp$ și eliminând pe $m + p + 1$ și mp , găsim ecuația $\frac{3}{2}x = x^2 - y$, care reprezintă o parabolă cu axa $x = \frac{3}{4}$, și tangenta în vârf $y = -\frac{9}{16}$.

2. Să se traseze graficele următoarelor funcții

1) $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x + 1}$,

2) $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)(5-x)}$,

3) $f_3 : D_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Soluție.

$$D_1 = [-1, +\infty), y = f_1(x)$$

este ecuația graficului. Echivalența

$$y = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow y^2 = x + 1, x \in [-1, +\infty), \\ y \in [0, +\infty),$$

arată că graficul lui f_1 este arcul de parabolă din figura IV. 35.

2) $D_2 = [-1, 5]$, $y = f_2(x)$ ecuația graficului. Echivalența

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)(5-x)} \Leftrightarrow$$

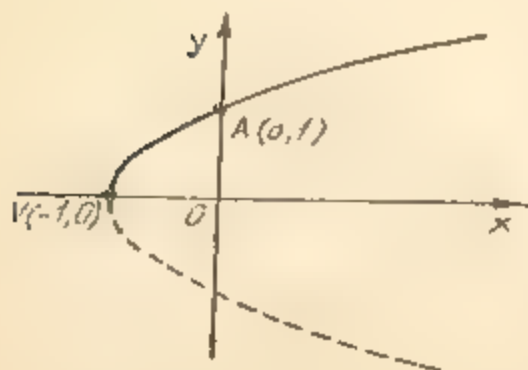


Fig. IV. 35

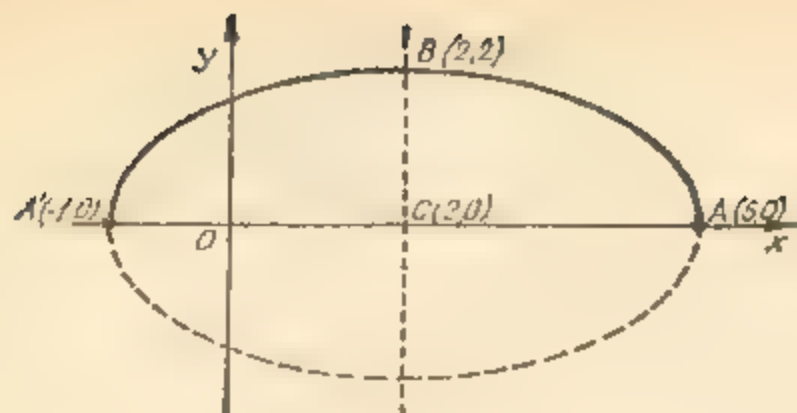


Fig. IV. 36

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9} (0 - (x - 2)^2), \quad x \in [-1, 5],$$

$$y \in [0, 2] \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$x \in [-1, 5], y \in [0, 2]$ arată că graficul lui f_2 este arcul de cupsa din figura IV. 36.

ii) $D_0 = \{(-x, -y) \mid (-x, -y) \in D_0\}$,
 $y = f_0(x) = \pm \sqrt{4 - 3(x - 2)^2}$ graficul este hiperbolă
 fiind că $y = \pm \sqrt{4 - 3(x - 2)^2} \Leftrightarrow y^2 = 4 - 3(x - 2)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty),$$

$y = f_0(x)$ este o parte dintr-o hiperbolă (fig. IV. 37).

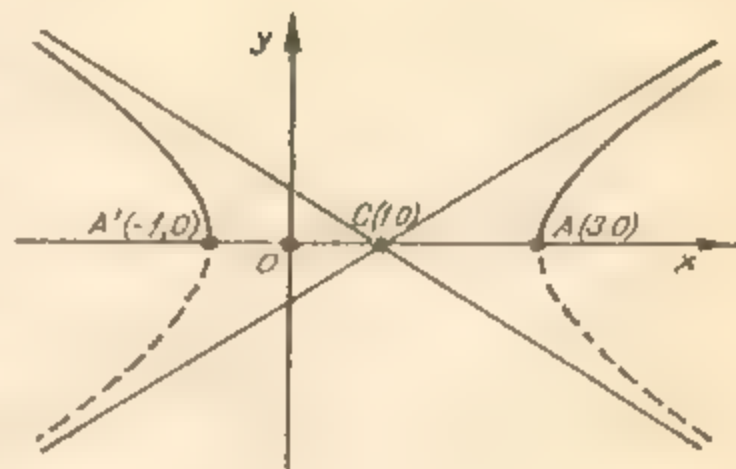


Fig. IV. 37

§ 6. Intersecția dintre o dreaptă și o conică

Fie dreapta $d: x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}$ și conica $\Gamma: g(x, y) = 0$.

Teoremă. Intersecția

$d \cap \Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}, g(x, y) = 0\}$ este caracterizată de rădăcinile în \mathbb{R} ale ecuației

$$t^2 \varphi(u, v) + t(u g_{x_0} + v g_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0,$$

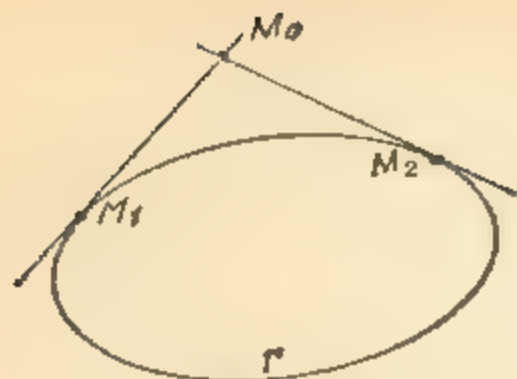


Fig. IV. 18

unde

$$\varphi(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2,$$

$$g_{x_0} = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}),$$

$$g_{y_0} = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}).$$

Demonstrație. 1) Fie $\varphi(u, v) \neq 0$. Ecuația în t este de gradul doi și are discriminantul $q = (ug_{x_0} + vg_{y_0})^2 - 4\varphi(u, v)g(x_0, y_0)$. Dacă $q > 0$, atunci ecuația în t are două rădăcini reale distincte t_1, t_2 și deci $d \cap \Gamma = \{M_1, M_2\}$.

Dacă $q = 0$, atunci ecuația în t are două rădăcini reale egale $t_1 = t_2$. În acest caz $d \cap \Gamma = \{M_1\}$, iar dreapta d se numește *tangenta* la Γ în punctul M_1 . Evident, din orice punct $M_0(x_0, y_0)$ se pot duce cel mult două tangente la Γ (fig. IV. 18). În particular, când $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, adică $g(x_0, y_0) = 0$ și g_{x_0}, g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul $M_1(x_0, y_0)$ are ecuația (fig. IV. 4, 9, 16, 22)

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0,$$

(dedublata ecuației conice în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin $M_0(x_0, y_0)$ și este perpendiculară pe linia cent, se numește *normala* la Γ în punctul M_0 (fig. IV. 4, 9, 16, 22). Ea are ecuația

$$(x - x_0)g_{y_0} - (y - y_0)g_{x_0} = 0.$$

Dacă $q < 0$, atunci ecuația în t nu are soluții și deci $d \cap \Gamma = \emptyset$.

2) Fie $\varphi(u, v) = 0$. Ecuația în t este de gradul întâi. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} \neq 0$ atunci avem o soluție unică t_1 și deci $d \cap \Gamma = \{M_1\}$. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația în t este o imposibilitate și deci $d \cap \Gamma = \emptyset$. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, ecuația este identic satisfăcută și deci

$$d \subseteq \Gamma, \text{ de unde } d \cap \Gamma = d.$$

Fie Γ o conică oarecare. O direcție $\vec{a}(u, v)$ se numește *direcție asimptotică* pentru Γ dacă

$$\varphi(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0,$$

în \mathbb{R}^2 . Evident, o dreaptă care are o asemenea direcție aparține lui Γ sau taie pe Γ într-un singur punct sau nu taie pe Γ .

Fie $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Dacă $\delta < 0$ (conice de *gen hiperbolic*), atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ da două direcții asimptotice. Dacă $\delta > 0$ (conice de *gen eliptic*),

atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ nu are soluții nebanale, adică nu există direcții asimptotice. Dacă $\delta = 0$ (conice de gen parabolic), atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ dă o direcție asimptotică dublă.

O dreaptă $d: x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}$ se numește *asimptotă* conicei Γ , dacă direcția ei (u, v) este o direcție asimptotică și $d \cap \Gamma \rightarrow \emptyset$. Se observă că o asimptotă a conicei Γ este caracterizată prin ecuația

$$ug_x + vg_y = 0,$$

unde (u, v) este o direcție asimptotică și $g_{x_0} = 0, g_{y_0} = 0$ nu implică $g(x_0, y_0) = 0$.

În concluzie, hiperbola admite două asimptote care trec prin centrul conicei, elipsa nu admite direcții asimptotice și nici asimptote, iar parabola admite o direcție asimptotică, dar nu admite asimptotă (ecuația $ug_x + vg_y = 0$ este o imposibilitate).

Observație Pentru studiul funcțiilor reale, noțiunea generală de asimptotă este dată în manualul de Analiză matematică.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctul $O(0, 0)$, dreapta $d: x + y - 1 = 0$ și conica

$$\Gamma: x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0.$$

Se cere:

- 1) tangentele din O la Γ ,
- 2) ecuația reuniunii $d \cup \Gamma$,
- 3) elementele mulțimii $d \cap \Gamma$,
- 4) asimptotele lui Γ ,
- 5) ecuația tangentei și ecuația normalei la Γ în $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Soluție 1) Se observă că axa Oy nu este tangentă la Γ . Orice altă dreaptă care trece prin origine are ecuația $y = mx$. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} y = mx, \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $(1 + 2m)x^2 + 2(1 + 2m)x - 2 = 0$ și evident $1 + 2m \neq 0$. Punând condiția ca ecuația să aibă rădăcină dublă găsim $(1 + 2m)^2 - 2(1 + 2m) = 0$, adică $m = \frac{1}{2}$. Astfel din $O(0, 0)$ se poate duce o singură tangentă la Γ și anume dreapta de

$$\text{ecuația } y = \frac{1}{2}x.$$

2) Reminem că $U \cap \Gamma$ are ecuația

$$(x + y - 1)(x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2) = 0.$$

3) Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0, \end{cases}$$

găsim soluțiile $(1, 0)$ și $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$. Acestea sunt valorile coordonatelor punctelor din $U \cap \Gamma$.

4) Deoarece ecuațiile celor două asimptote sunt date de ecuația $u^2 - 2u - 1 = 0$. Rezultă $u = 0$ și $u + 2v = 0$. Astfel găsim direcțiile $(0, v)$ și $(-2, 1)$. Deci

$$0 = (x - u - 1) = x(x + 2) = 0, \quad v \neq 0,$$

respectiv,

$$x(x + 2) = 0 \quad \text{și} \quad 1 = (x - u - 1) = 0.$$

Aceasta înseamnă că asimptotele lui Γ au, respectiv, ecuațiile $x + 2 = 0$ și $x + 2y = 0$, deci Γ este o hiperbolă.

5) Prin dedublare găsim ecuația tangentei,

$$x + 0 = \left((x + u - 1) - \frac{1}{2} \right) = (x + 0) - 2 \left(u - \frac{1}{2} \right) - 2 = 0,$$

adică $x - 2u - 2 = 0$. Partea dreaptă este $\frac{3}{4}$ iar partea stângă este $\frac{4}{3}$.

De aceea ecuația în u și t are ecuația $u - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}t$.

2. Fie E o elipsă raportată la axe, 1, A' vîrfurile sale de pe Ox , iar B, B' cele de pe Oy și P un punct oarecare al elipsei.

1) Să se arate că dreapta determinată de punctele de intersecție ale cercurilor circumscrise triunghiurilor $PA'A'$ și PBB' este tangentă în P la E .

2) Fie P_1, P_2 simetricele lui P față de centrele celor două cercuri. Să se arate că dreapta P_1P_2 trece printr-un punct fix.

3) Să se găsească locul geometric al simetricului punctului P față de centrul cercului circumscris triunghiului $PA'A'$, cînd $P \in E$.

Soluție. 1) Cercurile care trec prin două puncte au centrele pe mediatoarea segmentului care unește aceste puncte.

Ecuația canonică a elipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De aceea P are coordonatele $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi)$.

Deoarece $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$ sînt simetrice faţă de Oy , rezultă că cercurile care trec prin A' şi A au ecuaţii de formă $x^2 + (y - v)^2 = a^2 + v^2$, adică $x^2 + y^2 - 2vy = a^2$. În asemenea cerc trece prin P numai dacă $a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = 2vb \sin t = a^2$, adică

$$2v = \frac{b^2}{b} \frac{a^2}{a} \sin t.$$

Analog, cercul care trece prin punctele P , $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ are ecuaţia $x^2 + y^2 - 2ux = b^2$, cu condiţia $a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = 2ua \cos t = b^2$, adică $2u = \frac{a^2}{a} \frac{b^2}{b} \cos t$.

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele de intersecţie ale celor două cercuri se obţine scăzînd, membru cu membru, ecuaţiile cercurilor; y sînt $2ux + 2vy = a^2 - b^2$ cu condiţiunile $2u = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t$, $2v = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin t$. Înlocuind pe $2u$ şi $2v$, simplificînd cu $a^2 - b^2$, deducem $\frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = 1$, iar aceasta este ecuaţia tangentei la E în P , obţinută prin dedublare.

2) Cercul P_1P_2 are centrul $O_1\left(0, v = \frac{b^2}{b} \frac{a^2}{a} \sin t\right)$, iar cercul PBP_2 are centrul

$$O_2\left(u = \frac{a^2 - b^2}{2a} \cos t, 0\right).$$

De aici simetricele lui $P(a \cos t, b \sin t)$ faţă de O_1 şi O_2 sînt, respectiv,

$$P_1\left(-a \cos t, -\frac{a^2}{b} \sin t\right), P_2\left(-\frac{b^2}{a} \cos t, -b \sin t\right).$$

Dreapta P_1P_2 are ecuaţia

$$\frac{x + a \frac{\cos t}{a}}{\frac{\cos t}{a}} = \frac{y + \frac{a^2}{b^2} \sin t}{\frac{\sin t}{b}},$$

adică $ax \sin t - by \cos t = 0$. Aceasta trece prin originea.

3) Locul geometric al punctului $P_1\left(-a \cos t, -\frac{a^2}{b} \sin t\right)$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = -a \cos t \\ y = -\frac{a^2}{b} \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

sau ecuaţia carteziană implicită

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^4} = 1.$$

Aceasta este însă o elipsă.

§ 7. Intersecția a două conice

Fie conicele $\Gamma_1: g(x, y) = 0$ și $\Gamma_2: h(x, y) = 0$. Intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este caracterizată prin sistemul

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ h(x, y) = 0, \end{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

O conică fiindare dintre ecuațiile acestui sistem are gradul doi, în cîse în $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține cel mult patru puncte.

Păsupunem că Γ_1 este cercul de ecuație (1) $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, iar Γ_2 este cercul de ecuație (2) $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Coordonatele punctelor comune trebuie să verifice ambele ecuații, deci și ecuația obținută prin scăderea lor,

$$(3) \quad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0.$$

Această ecuație reprezintă o dreaptă perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri și se numește *axa radicală* a celor două cercuri. Sistemul format din ecuațiile (1) și (2) este echivalent cu sistemul format de ecuațiile (1) și (3) sau cu cel format de ecuațiile (2) și (3).

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau hiperbolele $\Gamma_1: x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $\Gamma_2: -x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Să se determine $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Soluția. Problema se reduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

în \mathbb{R}^2 . Scăzînd cele două ecuații rezultă $x^2 - y^2 = 0$. Astfel sistemul inițial este echivalent cu

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Din $x = y$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ deducem soluțiile $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, iar $x + y = 0$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ nu au soluții comune. În concluzie, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține punctele de coordonate $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Se cer punctele comune ale cercurilor $C_1: x^2 + y^2 - 3x + 4 = 0$ și $C_2: x^2 + y^2 + y - 2 = 0$.

Soluție. Sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Rezultă $A(0, -2)$, $B\left(-\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

3. Se consideră ecuația matricială

$$A^2 + A = aI, \quad a \in \mathbb{R}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve ecuația în cazul când toate soluțiile sînt reale.

Soluție. Ecuația devine

$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{ sau } \begin{cases} x^2 + y^2 + a = 0 \\ y(2x + 1) = 0. \end{cases}$$

(i) Sistemul $x^2 + y^2 + a = 0$, $y = 0$ admite soluția reală dacă $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

(ii) Sistemul $y = 0$, $x(2x + 1) + a = 0$ admite soluția reală dacă $a \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Observăm că ambele sisteme au două soluții reale acurate pentru $a = -\frac{1}{4}$ în acest caz

însă unul din sisteme se reduce la $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$ și deci

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notă. Ecuația $x^2 + y^2 + x + a = 0$ reprezintă o familie de hiperbole, iar ecuația $y(2x + 1) = 0$ o reuniune de două drepte.

§ 8. Aplicații în fizică și în tehnică

Elipsa de inerție. Fie un plan raportat la reperul cartezian xOy și sistemul de puncte materiale $M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$ avînd respectiv masele m_1, \dots, m_n . Momentul de inerție al sistemului de puncte fața de o axa de rotație h se definește prin expresia

$I_h = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$, unde d_i este distanța de la punctul M_i la axa h . Fără să afectăm generalitatea problemei putem presupune că axa de rotație este $h_0: x \cos \theta + y \sin \theta = 0$, unde θ este fixat. Rezultă $d_i = d(M_i; h_0) = |x_i \cos \theta + y_i \sin \theta|$ și deci

$$(1) \quad I_{h_\theta} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \cos \theta + y_i \sin \theta)^2 = I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta + I_x \sin^2 \theta, \quad \text{unde}$$

$I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$, $I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$ sînt respectiv momentele față de axele Oy , Ox , iar

$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$ este *momentul centrifugal*.

Pentru $\theta \in [0, 2\pi)$ variind se obțin toate axele de rotație posibile ca linii prin origine (fascicul de drepte). Notînd $\rho = \frac{1}{\sqrt{I_{h_\theta}}}$, $a = I_y$, $b = I_{xy}$, $c = I_x$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, relația (1) se transformă

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$

Deoarece $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (de ce?), aceasta este ecuație reprezentată o elipsă E . În concluzie, oricare ar fi repartitia maselor m_1, \dots, m_n , momentele de inerție ale sistemului de puncte $\{M_1, \dots, M_n\}$ în raport cu axele de rotație ce trec prin origine sînt caracterizate de elipsa E , numită *elipsa de inerție a sistemului de puncte $\{M_1, \dots, M_n\}$ față de punctul O* (fig. IV. 39). Elipsa de inerție joacă un rol important în mecanică și în rezistența materialelor.

Legea Boyle-Mariotte Experimente din fizică au dovedit că într-un regim izoterm produsul dintre presiunea p și volumul V , ale aceleiași mase de gaz, rămîne constant.

Dacă (p, V) sînt interpretate ca fiind coordonatele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian pOV , atunci ecuația $pV = \text{const}$, $p > 0$, $V > 0$ reprezintă o ramură a unei hiperbole echilaterale (fig. IV. 40). În fizică această ramură se numește *izotermă*.

Energia potențială Câmpul gravitațional newtonian (cîmp de atracție) și cîmpul electrostatic coulombian (cîmp de atracție sau de respingere) au proprietatea că energia potențială U a unui punct material (de masă m în cazul cîmpului gravitațional sau de sarcină electrică q în cazul cîmpului coulombian) aflat în câmpul de cîmpuri este invers proporțională cu distanța r de la origine la punctul material. Considerînd că (r, U) sînt coor-

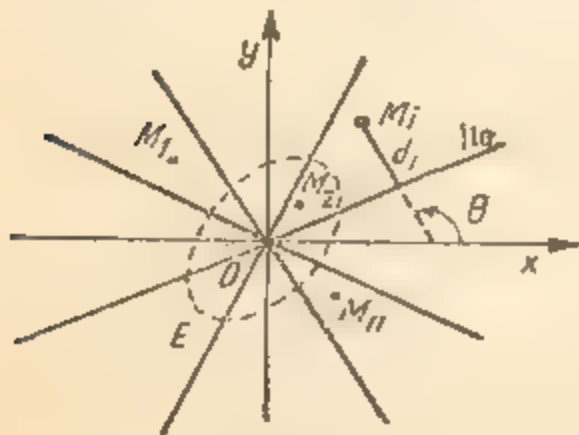


Fig. IV. 39

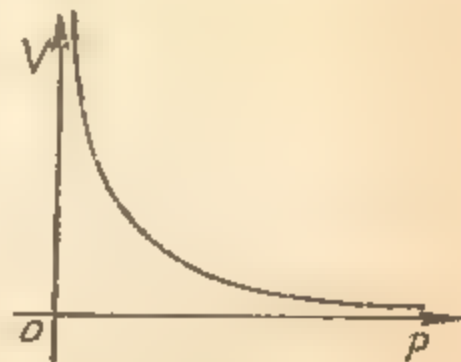


Fig. IV. 40

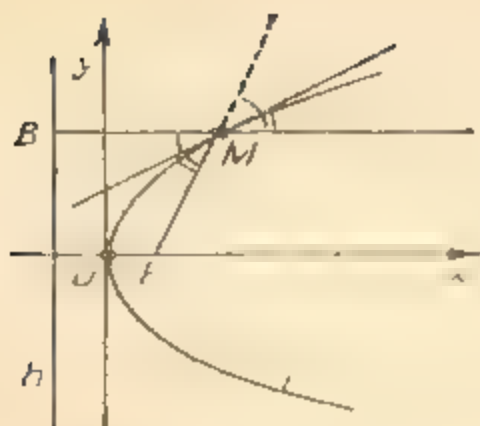


Fig. IV. 41

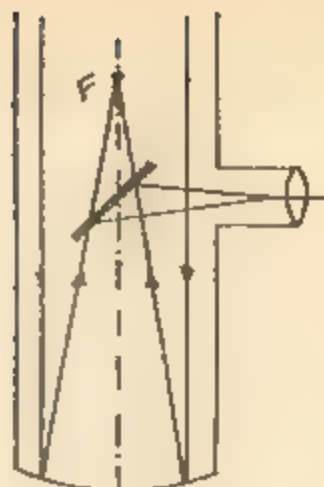


Fig. IV. 42

cu L de un punct într-un plan raportat la reperul cartezian OP' , ecuația $OP' = \text{const}$ prezintă ecuația a unei hiperbole echilateră situată în cadranul I dacă $L > 0$ sau în cadranul IV dacă $L < 0$, pentru cazul cînd $h = 1$ sau numai în cadranul IV pentru cazul gravitațional.

Oglindă parabolică. Ecuația dotei P a dezvoltarea h și focarul F . Tangenta la P într-un punct $M \in P$ este bisectoare unghiului FMB , unde B este proiecția lui M pe directoarea h (fig. IV. 41). Prin urmare, proprietatea a parabolei se bazează constanța și funcționarea ei.

În cazul obiectelor, captatorului de radiație solară, proiectoarelor, farurilor etc. Mai precis, toate acestea folosesc oglinzi parabolice, adică oglinzi a căror suprafață este un paraboloid de revoluție (suprafață obținută prin rotirea unei parabole în jurul axei de simetrie).

În cazul farurilor proiectoarelor (fig. IV. 42) razele de lumină care ies de la un punct de la capătul unui corp care se situează în direcția axei oglinzii, sunt concentrate de oglindă într-un punct sau într-o regiune mică și paralelă cu axa oglinzii, dar mică și înclinată față de axă, se concentrează în puncte din apropierea focarelor. Astfel, în planul focal al oglinzii, se poate observa răsturnată a corpului ce se situează în fața oglinzii. Situația este similară în cazul microscopului și al telescopului care folosesc efectul termic al razei lor solare concentrate în „puncte” cu ajutorul unor oglinzi parabolice.

În cazul proiectoarelor (fig. IV. 43), sursa de lumină puternică se așază în focarul oglinzii cilindrice. Fasciculul de raze cu vîrf în focar este reflectat de oglindă și transformat într-un fascicul de raze paralele cu axa oglinzii. Cazul farurilor este analog.

Menționăm că pe lângă oglinzile parabolice o mare aplicație au și oglinzile sferice, elipsoidale și hiperbolice.

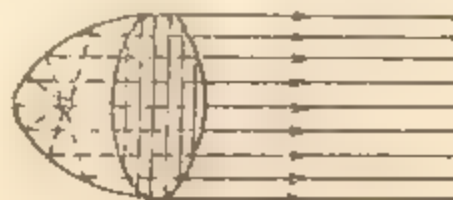


Fig. IV. 43

Traietorii într-un câmp central. În câmpul gravitațional newtonian, ca și în câmpul electrostatic coulombian, traiectoria descrisă de un punct material este o conică cu focarul în origine. În coordonatele polare (r, θ) ecuația acestei conice este

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta},$$

unde p este un parametru, iar e este excentricitatea conicei.

Dacă $e \in (0, 1)$ atunci punctul material se mișcă pe o elipsă și deci mișcarea este finită. Pentru $e = 1$, traiectoria este o parabolă, iar pentru $e \in (1, \infty)$ traiectoria este o hiperbolă. Această teorie fizică este legată de probleme concrete: mișcarea planetelor în jurul soarelui, legile lui Kepler, lansarea de pe suprafața pământului a sateliților artificiali și a rachetelor, mișcarea electronilor în câmpul electrostatic al nucleelor etc.

§ 9. Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu vârfurile $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(b, 0)$, $a, b, c > 0$.
- 1) Să se scrie ecuația cercului Γ circumscris triunghiului ABM .
- 2) Să se arate că tangenta în origine la cercul Γ este perpendiculară pe AC .
- 3) Notând cu M un punct mobil pe cercul Γ , se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM .

R. 1) $x^2 + y^2 + bx - ay = 0$. 2) Tangenta în origine la cercul Γ este $bx - ay = 0$, iar a dreptei AC este $ax + by - ab = 0$. 3) $x^2 + y^2 + bx - ay + \frac{1}{9}(b^2 + a^2) = 0$.

2. Se consideră dreapta $d: 3x - 4y + 4 = 0$.

- 1) Să se scrie ecuația bisectoarei b a unghiului ascuțit format de dreapta d cu axa Oy .
- 2) Să se scrie ecuația cercului C , ce trece prin origine, tangent în origine dreptei $y = mx$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și care mai trece prin punctul de intersecție dintre bisectoarea b cu axa Ox .
- 3) Presupunând m variabil, să se găsească locul geometric descris de centrul cercului C .

R. 1) $4x - 2y - 1 = 0$. 2) $C: x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2m}y = 0$, $m \neq 0$. 3) $x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$.

3. Într-un reper cartezian se dau dreptele

$$d: 2(x - (t + 1)y - t) = 0,$$

$$d': (3t + 1)x + (t - 1)y = 6t - 2, t \in \mathbb{R}$$

- 1) Să se arate că dreapta d trece printr-un punct fix A și că dreapta d' trece printr-un punct fix B .
- 2) Să se calculeze unghiul orientat al dreptelor d, d' .
- 3) Să se arate că punctul M , comun dreptelor d și d' , aparține unui cerc fix.

R. 1) $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. 2) $\widehat{(d, d')} = \frac{\pi}{4}$. 3) $C: x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

4. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ se numește *clopot Gauss* (fig. IV, 44). Să se găsească intersecția dintre clopotul Gauss și cercul cu centrul în origine și de rază unu. Să se arate că cele două curbe au aceeași tangentă în punctul de contact de pe axa Oy .

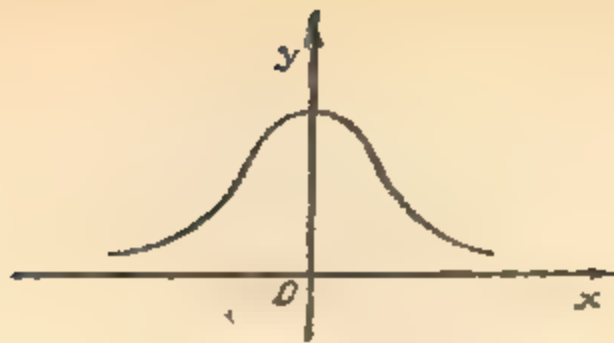


Fig. IV. 44

Indicație. Se rezolvă sistemul $y = f(x)$, $x = f(y)$. Tangenta la graficul unei funcții derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în punctul $(x_0, f(x_0))$, are ecuația $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

5. Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Să se afle locul geometric al centrului de greutate

a) triunghiului MPF' , unde M este un punct mobil pe elipsă, iar F și F' cele două focare.

$$\text{R. } P_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{b)}$$

$$\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2$$

6. Se dă un cerc C , cu diametrul $[AB]$, de lungime $2r$, $r \in (0, \infty)$. Fie Γ un cerc cu centrul variabil $M \in C$ și tangent în N la $[AB]$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta AN cu cercul comun al celor două cercuri C și Γ .

$$\text{R. } P: \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \text{c)}$$

$$\left(\frac{r}{2} \right)^2$$

7. Să se afle elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, unde

1) Să se scrie ecuația tangentei la E în punctul $T \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

2) Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa E paralele cu normala la E în punctul

P . Să se scrie ecuațiile tangentelor din punctul $P(a-1, 0)$ la elipsa E .

Indicație. 1) Prin două puncte. 2) Se utilizează condiția fasciculului de cercuri paralele.

8) Se folosește sistemul

$$\begin{cases} r(x-3) + s(y+1) = 0 \\ 3y - 5 = 0 \end{cases} \quad r, s \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

8. Se dă elipsa $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ și dreapta $d_n: y = x + n$, $n \in \mathbb{R}$, care intersectează elipsa în punctele P și Q .

1) Să se scrie ecuația cercului C de diametru $[PQ]$.

2) Fie $\{S, T\} \subset C \cap E$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor PQ și ST când n este variabil.

$$\text{Indicație. 1) } C: \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{2) } (x-n)(x+n) \in (-1, 5) \cup (5, 9)$$

2) $ST: y = x - \frac{m}{2}$, $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ și deci locul geometric este segmentul

$$y = 4x, x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right].$$

9. Se dă hiperbola

$$H: x^2 - 2y^2 - 2 = 0.$$

- 1) Să se găsească ecuația tangentei la H în punctul $M_0(2, 1)$.
- 2) Există tangente la H paralele cu normala la H în M_0 ?
- 3) Să se scrie ecuațiile tangentei la H duse din $A(0, 1)$.

10. Se consideră hiperbola H și un punct P în planul exterior. Prin P se duc paralele la asimptotele hiperbolei H . Fie M, N punctele de intersecție ale acestor paralele cu hiperbola.

- 1) Care este locul geometric al punctelor P care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei H ?
- 2) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MA este paralelă cu una din axele hiperbolei?

R. 1) hiperbola conjugată lui H , 2) axa Ox , respectiv axa Oy .

11. Fie hiperbola echilaterală $H: x^2 - y^2 = a^2$ cu vârfurile A, B și o dreaptă XY paralelă cu axa Ox care taie pe H în C și D . Notăm $\{M\} = CB \cap AD$. Să se determine locul geometric al punctului M .

R. Segmentul $x = 0, y \in (-a, a)$.

12. Fie x și y coordonatele unui punct M în raport cu un reper cartezian. Să se scrie ecuația și să se reprezinte mulțimea:

$$\Gamma: \frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{9} = 1.$$

13. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2}{4} - 1\right|}$.

14. În planul raportat la un reper cartezian se consideră parabola $P: 2y = x^2 - 1$. Fie M un punct pe parabolă. Să se determine, în funcție de abscisa m a lui M :

1) coordonatele punctului T unde tangenta în M la P taie axa Ox , aria triunghiului OTM și coordonatele centrului de greutate G al aceluiasi triunghi.

2) locul geometric al punctului G cînd M descrie parabola dată.

Să se arate că înălțimea triunghiului OTM corespunde două vîrfuri T trecînd printr-un punct fix:

R. 1) $T\left(\frac{m}{2}, 0\right)$, aria $(OTM) = \frac{m^3}{8}$, $G\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{6}\right)$. 2) Parabola:

$$x = \frac{m}{2}, y = \frac{m^2}{6}, m \in \mathbb{R}. \text{ Punctul fix } A(0, 1).$$

15. Să se determine regiunile din planul xy , unde trebuie să se găsească punctul $M(x, y)$, astfel ca ecuația $16t^2 + 4(x - 5)t + y - 3x + 5 = 0$ în $t \in \mathbb{R}$, să aibă:

1) O rădăcină cuprinsă între 0 și 1.

2) Ambele rădăcini cuprinse între 0 și 1.

Indicație. Ecuația are rădăcini reale dacă $x^2 + 2x - 5y - 5 \geq 0$. Aparținerea la $[0, 1]$ adăugă 1) $(y - 3x + 5)(x + y + 1) \leq 0$ respectiv 2) $y - 3x + 5 \geq 0, x + y + 1 \geq 0, 0 \leq \frac{x^2 + 2x - 5y - 5}{8} \leq 1$.

16. Să se descrie mulțimea punctelor M ale căror coordonate satisfac sistemul $x^2 + y^2 = 1, 2y^2 - x - 1 = 0$.



Fig. IV. 45

17. Pentru a pili vârful unui corp ascuțit prins într-o înghina (fig. IV. 45) se apasă pila la cele două capete cu forțele \vec{F}_1 și \vec{F}_2 care au ca direcția pilei unghiuri de 30° și, respectiv 60° . Cunoscând lungimea pilei $l = 25 \text{ cm}$, $\|\vec{F}_1\| = 80 \text{ N}$ și neglijând greutatea proprie a pilei, să se determine felul în care trebuie să varieze mărimea forței \vec{F}_2 astfel încât pila să-și păstreze orizontalitatea în timpul lucrului.

Indicație. Se scrie ecuația a momentelor forțelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 față de punctul de contact al pilei cu corpul de pilit. Rezultă

$$\|\vec{F}_2\| = 46,24 \frac{x}{25-x}, \quad x \in [a, b] \subset (0, l).$$

traseicul este un arc de hiperbolă.

18. Fie elipsa (hiperbola sau parabola) Γ , fie punctul $M \in \Gamma$ și o dreaptă d care nu are ca prim M . Fie MN (fig. IV. 46) o dreaptă care taie pe d în L (dacă $M = N$, dreapta MN este tangenta la Γ în punctul M). Să se arate că există un punct $A \in \Gamma$ cu proprietatea că funcția $f: \Gamma \rightarrow \{A\} \rightarrow d$, $f(A) = L$ este bijectivă (injectivă).

Indicație. A este punctul pentru care $MA \parallel d$.

19. Să se discute poziția cercurilor

$$C_1: x^2 + y^2 = 1 - \alpha^2,$$

$$C_2: (x - 2)^2 + y^2 = 1 - \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$$

Indicație. Se vor considera cazurile: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha \in (-1, 1)$; 3) $\alpha \in \{-1, +1\}$; 4) $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

20. Se dă egalitatea $(y - x)t^2 - 2xt + x + y + 1 = 0$, unde $t \in \mathbb{R}$, iar (x, y) sînt coordonatele unui punct din plan. Considerând pe t drept necunoscută, să se determine semnul rădăcinilor acestei ecuații.

21. Pentru perechile (x, y) de numere reale care sînt subiecte inegalităților $|y - x| \leq 1$, $|y + x| \leq 1$, $|y| \geq |x| - 1$ să se determine acelea pentru care y este maxim sau minim în $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$, $\{0, -1\}$.

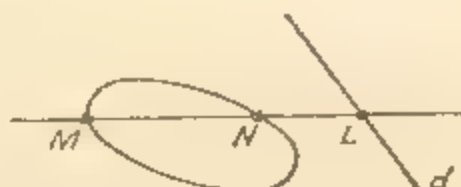


Fig. IV. 46

22. Să se rezolve în \mathbb{R}^2 sistemele de ecuații

$$1) \begin{cases} (x + y - 1)(x^2 + y^2 - 6x) = 0, \\ (x + y - 1)(x^2 + y^2 - 8x) = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3xy - 2(x + y) = 28, \\ 2xy - 3(x - y) = 14; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70, \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y^2 = ax, \\ y + x^2 = by \end{cases}$$

și să se interpreteze geometric rezultatele găsite.

CUPRINS

Capitolul I. Calcul vectorial	3
§ 1. Vectori liberi	3
§ 2. Adunarea vectorilor	8
§ 3. Înmulțirea vectorilor cu numere reale	12
§ 4. Dependență liniară	16
§ 5. Proiecție ortogonală	21
§ 6. Produs scalar	24
§ 7. Probleme propuse	28
 Capitolul II. Dreapta	 32
§ 1. Reper cartezian	32
§ 2. Dreapta determinată de un punct și de un vector director	35
§ 3. Dreapta determinată de două puncte distincte	37
§ 4. Ecuația carteziană generală a unei drepte	40
§ 5. Reuniunea și intersecția a două drepte	44
§ 6. Fascicul de drepte	48
§ 7. Dreapta orientată	50
§ 8. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi	54
§ 9. Locuri geometrice	56
§ 10. Semiplane	58
§ 11. Probleme de programare liniară în două variabile	61
§ 12. Probleme propuse	64
 Capitolul III. Izometrii	 69
§ 1. Transformări geometrice	69
§ 2. Translații	70
§ 3. Rotații	73
§ 4. Izometrii	76
§ 5. Probleme propuse	81

§ 1. Cercul	83
§ 2. Elipsa	88
§ 3. Hiperbola	94
§ 4. Parabola	101
§ 5. Conice	106
§ 6. Intersecția dintre o dreaptă și o conică	111
§ 7. Intersecția a două conice	116
§ 8. Aplicații în fizică și în tehnică	117
§ 9. Probleme propuse	120

